Una aproximación geométrica a la equivalencia masa-energía en relatividad

Rafael Andrés Alemañ Berenguer[1,2]
[1]*Departamento de ciencia de materiales, óptica y tecnología electrónica. Universidad Miguel Hernández, Avda. Universidad, s/n. Edif. Torrevaillo - 03202l - Elche (Alicante – España)*
[2]*Sociedad Astronómica de Alicante (Grupo de gravitación y mecánica celeste), Apartado de Correos 616, 03080-Alicante (España)*

E-mail: agrupación.astroalicante@gmail.com

(Recibido el 8 de Octubre de 2008; aceptado el 18 de Diciembre de 2008)

Resumen

La equivalencia relativista entre masa y energía ha sido objeto interpretaciones erróneas, aunque muy ampliamente difundidas, incluso en libros de texto. La mayoría de los malentendidos surgen de la incomprensión del carácter básicamente tetradimensional de la realidad física, y en la dificultad de transferir las nuevas ideas a los estudiantes para lograr una comprensión adecuada. En este trabajo se presenta una defensa del método geométrico espacio-.temporal, debido a Minkowski, como un camino simple y directo para alcanzar ese objetivo.

Palabras clave: Masa, energía, relatividad, espacio-tiempo, geometría, Einstein, Minkowski.

Abstract

Very widespread misinterpretations of the relativistic mass-energy equivalence and its vague formulation in most text-books, may be some of the sources of very common misconceptions on explaining this outstanding piece of the 20th century science. Those mistakes emerged through misunderstanding of modern physics assumptions about the four-dimensional nature of reality, and difficulty in transferring those new ideas to operative thought in order to get an effective learning. In this paper, a space-time geometric formalism, originally due to Minkowski, is introduced in order to simply and straightly achieve that goal.

Keywords: Mass, energy, relativity, space-time, geometry, Einstein, Minkowski.

PACS: 04.20.-q, 04.20.Cv **ISSN 1870-9095**

I. INTRODUCCIÓN

La gran mayoría de los textos educativos sobre física de nivel preuniversitario, e incluso de primeros cursos universitarios, contienen capítulos dedicados a la Relatividad Especial, una de las grandes revoluciones intelectuales del siglo XX. En ellas ocupan un lugar destacado dos ideas consideradas centrales en la distinción de la teoría de Einstein frente a sus antecesoras: la masa que supuestamente se incrementa con la velocidad, y la equivalencia masa-energía, a la cual se vincula una nueva definición de energía cinética.

El principal problema de estos planteamientos es que se abordan como meras extensiones de la mecánica clásica, refinamientos que ineludiblemente deben añadirse cuando las velocidades se aproximan a la de la luz para obtener un buen acuerdo entre las predicciones teóricas y los datos experimentales. Con ello se pierde la ocasión de subrayar que la Relatividad Especial implica toda una nueva perspectiva sobre la naturaleza del mundo físico, sobrepasando con mucho el carácter de retoque ineludible en la mecánica de Newton-Euler.

En el clásico texto de Alonso y Finn [1], por ejemplo, ni siquiera se menciona el término Relatividad en el título del capítulo 11, denominado simplemente "Dinámica de alta energía". En dicho capítulo, en la página 334 se dice: "…definimos el momentum de una partícula por $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$….", y más adelante en ese mismo parágrafo: "Recordemos que la fuerza aplicada sobre una partícula ha sido definida como $\boldsymbol{F} = d\boldsymbol{p}/dt$,…". El empeño por mantener estas dos definiciones tal cual se establecieron en la mecánica clásica, conduce finalmente a nociones como la de "masa variable con la velocidad" (la masa en reposo dividida entre el factor de Lorentz):

$$m = \frac{m_{rep}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad (1)$$

y la "energía cinética relativista":

$$E_c = (m - m_{rep.})c^2 \qquad (2)$$

Aunque la deducción mas general de la equivalencia entre masa y energía fue bastante posterior a los trabajos de Einstein de 1905 [2], suele suponerse que dicha equivalencia sirve tan sólo para la conversión de las unidades de masa en las de energía o viceversa, persistiendo en todo caso una separación profunda entre ambos conceptos [3]. Esta es una confusión harto frecuente que de hecho puede hallarse en una gran cantidad de textos educativos, no sólo preuniversitarios [4, 5, 6, 7, 8], sino también en los de nivel universitario [9, 10].

Desafortunadamente, las exposiciones más profundas sobre la genuina interpretación de esta fórmula y otras cuestiones relacionadas [11, 12, 13, 14] no suelen encontrarse con facilidad, bien por la dificultad de localización, bien por la elevada especialización de la materia. En dichas exposiciones se evidencia la naturaleza esencialmente geométrica de la teoría einsteniana, fundada en la multiplicidad tetradimensional que conocemos como "espacio-tiempo".

II. MINKOWSKI: GEOMETRÍA Y RELATIVIDAD

Fue el matemático germano-ruso Hermann Minkowski (1864 - 1909) quien reformuló la Relatividad Especial de Einstein en un formato geométrico espacio-temporal, dando entrada a conceptos relativistas hoy tan familiares como la cantidad invariante ds, denominada "intervalo espacio-temporal". Podemos imaginar este intervalo, si queremos, como la longitud del segmento 4-dimensional que une dos puntos –o "sucesos"– en el espacio-tiempo de Minkowski. En la notación moderna se escribe sencillamente,

$$(ds)^2 = (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 \qquad (3)$$

Si ds es mayor que cero ($ds > 0$) dicho segmento yace en el interior de un cono de luz, lo que significa que el móvil no se ha desplazado en momento alguno a mayor velocidad que la luz, y se llama "intervalo temporal". Cuando ds es menor que cero ($ds < 0$), ello indica que el segmento une un punto interior al cono de luz con otro exterior; la trayectoria asociada con ese intervalo no es físicamente realizable porque exigiría velocidades superiores a c; se trata de un "intervalo espacial". Finalmente, el caso $ds = 0$ sólo se da con los propios rayos de luz, de modo que tenemos un "intervalo nulo".

La contracción de las longitudes y la dilatación de los tiempos, típicos efectos relativistas, aparecen ahora como una consecuencia de la geometría minkowskiana. La descomposición de un intervalo espacio-temporal en sus proyecciones espacial y temporal sobre los ejes de los diversos sistemas de referencia, es la responsable de que las distancias y las duraciones de un mismo proceso resulten diferentes para distintos observadores. Muchos años después, Einstein se refirió a la introducción de esta manera de contemplar su teoría con estas palabras [15]:

"… antes de la investigación de Minkowski era preciso aplicar una transformación de Lorentz a una ley para comprobar su invariancia frente a tales transformaciones, mientras que él consiguió introducir un formalismo que hace que la propia forma matemática de la ley garantice su invariancia frente a las transformaciones de Lorentz. (…). Y demostró también que la transformación de Lorentz (prescindiendo de un signo algebraico diferente, debido al carácter especial del tiempo) no es otra cosa que una rotación del sistema de coordenadas en el espacio cuadridimensional."

FIGURA 1. Hermann Minkowski.

Aunque acogido en un principio con cierta renuencia, a causa del intrincado aparato matemático que lo acompañaba, el planteamiento de Minkowski acabó imponiéndose gradualmente en la comunidad de físicos relativistas. Tanto así que pocos años más tarde la geometría espacio-temporal proporcionaría a Einstein la clave para avanzar hacia su teoría de la Relatividad General.

III. SIGNIFICADO GEOMÉTRICO ESPACIO-TEMPORAL DE LA EQUIVALENCIA MASA-ENERGÍA

La famosa ecuación $E = mc^2$, fue considerada una mera relación de proporcionalidad entre dos magnitudes diferentes que o bien se conservan por separado, o bien pueden convertirse una en otra [15, 16, 17]; y también se tomó como la afirmación de una identidad estricta –con todas sus consecuencias– entre la masa y la energía [18, 19, 20, 21, 22, 23].

Quienes se inclinan por mantener la distinción entre masa y energía como propiedades separadas, admiten que en ciertas ocasiones la masa se convierte en energía. La desintegración de la partícula elemental llamada pión neutro en dos fotones, supone para estos autores un buen ejemplo de esa conversión, como se esfuerza en argumentar Francisco Flores [24], profesor asociado del departamento de filosofía de la Universidad Politécnica de California, en su artículo "Interpretaciones de la Ecuación de Einstein $E = mc^2$".

No obstante, Flores confunde el binomio "masa-energía" en discusión, con el par "materia-radiación"

cuando dice: "(…) en colisiones de aniquilación, donde la masa íntegra de las dos partículas entrantes se convierte en energía". En realidad, en la desintegración piónica es la materia (el pión) la que se transforma en radiación (el par de fotones), y no la masa en energía. Masa y energía son atributos, propiedades que asignamos por diversas razones a las sustancias físicas –materia y radiación, o campos en general– que forman el sustrato objetivo de la realidad.
Al identificar las nociones de masa y energía, advertiremos que en la mecánica relativista esta nueva idea se representa por una función que asocia un número real positivo a cada cuaterna ⟨*partícula*, *referencial*, *instante*, *escala de unidades*⟩. Puesto que la mecánica relativista presupone las transformaciones de Lorentz, bajo las cuales son covariantes las ecuaciones de Maxwell, resulta lícito aplicar la noción de masa equivalente a la energía del campo electromagnético, y por extensión a los demás cuantos de campo con velocidad c.

La Relatividad de Einstein reveló también que las tres componentes del impulso $\boldsymbol{p}$ y la energía E dividida entre c, forman un vector en cuatro dimensiones que suele llamarse "momento lineal relativista", p, pero que aquí denominaremos en adelante tetra-ímpetu, o 4-*ímpetu*, en homenaje a la importancia del vocablo en la historia de la mecánica.

En la geometría tetradimensional de Minkowski sólo las cantidades adecuadamente covariantes en cuatro dimensiones poseen significado físico. Ese es el caso del vector 4-ímpetu, (p_0, p_1, p_2, p_3), pero no el de la energía, que pasa ahora a ser la componente 0 multiplicada por c, $E_0 = cp_0$. A fin de representar el vector ímpetu imaginemos un sistema con cuatro ejes mutuamente perpendiculares, o sólo con tres –como se hace en los diagramas espacio-temporales de Minkowski– prescindiendo de uno de los tres ejes asociados con las tres últimas componentes de p.

La proyección del vector ímpetu sobre el primero de esos ejes nos proporcionaría la componente $p_0 = E_0/c$, mientras que de las otras obtendríamos los valores de p_1, p_2 y p_3. Estos tres últimos valores serían los que atribuiría a las componentes del momento lineal tridimensional un observador en movimiento relativo con respecto a la masa puntual cuyo vector ímpetu fuese p. Por su parte, la primera componente es proporcional a la energía, o a la masa, que mediría ese mismo observador, $p_0 = E_0/c = m_0c$. Por ello E_0 y m_0 se llaman respectivamente "energía relativa" y "masa relativa", en el sentido de corresponder a las mediciones obtenidas por un observador en movimiento relativo inercial.

El cuadrado del módulo (o de la "longitud absoluta", en el lenguaje Minkowskiano) del ímpetu sería:

$$(E_0/c)^2 - \boldsymbol{p}^2 = (mc)^2 = (E/c)^2, \qquad (4)$$

donde ahora E y m son la energía y la masa "propias"; es decir, las que mediría un observador que se moviese con la partícula, para el cual –obviamente– las componentes del impulso tridimensional se anularían. Fijémonos en el hecho significativo de que el vector ímpetu puede considerarse proporcional a un vector "energía" o "masa", también tetradimensional, según $cp_\mu = E_\mu = m_\mu c^2$.

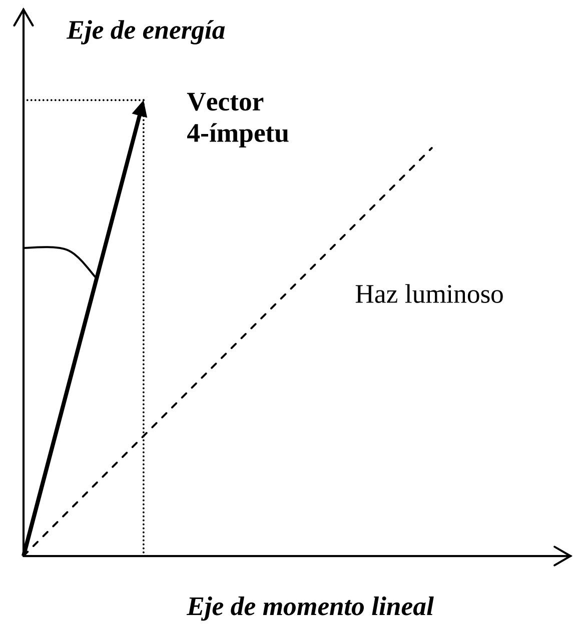

FIGURA 1. Arriba se ofrece una representación esquemática de un vector 4-ímpetu, en una gráfica bidimensional, donde el eje vertical es el de las energías y el horizontal el correspondiente al momento lineal. Obviamente, cuando la velocidad relativa se anula, el vector coincidiría con el eje de ordenadas: la energía propia coincide con la energía relativa.

A fin de incluir la luz en este razonamiento, conviene ahora prescindir de los hipotéticos observadores en movimiento o en reposo relativo, ya que estos últimos no existirían para un rayo luminoso. Nos quedamos tan solo con el vector p y sus proyecciones $p_0 = E_0/c = h\nu/c$, $p_1 = p_x$, $p_2 = p_y$, $p_3 = p_z$. Con la luz sucede que $(E_0/c)^2 - \boldsymbol{p}^2 = 0$, luego la masa y energía propias de un fotón son cero, como consecuencia de la geometría no euclídea empleada para construir las cantidades covariantes 4-dimensionales.

Esto no debe preocuparnos por dos motivos: en primer lugar, esos valores no pueden ser físicamente medidos por observador alguno, ya que nadie puede situarse en reposo relativo con respecto a rayo de luz. La energía relativa a nosotros que posee un fotón se manifiesta en fenómenos como el efecto fotoeléctrico, mientras que su masa inercial puede relacionarse con la presión de radiación descrita por Maxwell [25] y medida por Lebedev [26], o su masa gravitatoria inferirse de su desviación en un campo de gravedad. En segundo lugar, aunque la masa-energía propia de un fotón individual sea cero, no ocurre así con un haz luminoso real, en el que tenemos un conjunto de fotones no colineales. Sólo una onda plana infinita –una idealización irrealizable– poseería una masa-energía propia igual a cero.

¿Qué hay, pues, de las famosas transformaciones de masa en energía (o viceversa), típicas de las reacciones entre partículas subatómicas? Sencillamente que cuando se habla de que una cantidad de masa se ha convertido en energía –como en el ejemplo de la desintegración del pión– lo que en realidad ocurre es que la materia se ha convertido en radiación; y al contrario, una combinación oportuna de fotones puede generar a su vez partículas materiales. La masa-energía total sigue siendo la misma al comienzo que al final –distribuyéndose de diferente manera– sólo que ahora ha de calcularse mediante la suma de vectores tetradimensionales que obedecen reglas geométricas no euclídeas [27, 28, 29].

La fórmula, $\Delta E = c^2\Delta m$, se interpreta comúnmente como la afirmación de que una cantidad de masa Δm se ha convertido en una cantidad de energía $\Delta E/c^2$, cuando de hecho suele ocurrir que una cantidad de materia, con masa Δm y energía $\Delta E = c^2\Delta m$, se ha transformado en radiación con exactamente la misma masa y energía totales, como se explica magistralmente en el capítulo 6 de Wheeler [31]. Allí se habla del vector "momenenergía" para referirse a la magnitud que aquí denominamos 4-ímpetu, un tetravector formado por la energía y por las tres componentes espaciales del momento lineal), subrayando con ello la necesidad de nombres nuevos para conceptos nuevos.

IV. LA MASA QUE *NO* AUMENTA CON LA VELOCIDAD

La formulación geométrica espacio-temporal de la Relatividad conduce así a unas interesantísimas conclusiones. Una de ellas concierne al uso de expresiones formalmente incorrectas, como la de una "masa relativista" variable con la velocidad, $m_{rep.}(1 - v^2/c^2)^{-½}$. Sólo los escalares tetradimensionales (o "escalares de universo", invariantes ante cambios en el sistema de referencia) y los vectores –o, en general, tensores– tetradimensionales poseen un significado físico objetivo en el ámbito relativista. Un escalar que varíe con la velocidad no tiene sentido en el marco de esta teoría. Ese es el motivo de que tampoco pueda hablarse legítimamente de "energía cinética" en Relatividad, si no es como un abuso de lenguaje que fuerza los nuevos conceptos para encajarlos en la tradición newtoniana. En sentido relativista sólo cabe hablar de energías, o masas, propias y relativas [29]:

"Sobre todo, no hay un significado físico covariante en un concepto tal como la "energía cinética" definida por la expresión $(m - M)c^2 = Mc^2\{(1 - u^2/c^2)^{-½} - 1\}$, la cual, con $u << c$, coincide con la expresión clásica $Mu^2/2$. El primer término [de la expresión anterior] es la componente cero de un vector tetradimensional, mientras que el segundo término es un escalar tetradimensional. Es obvio que tal "híbrido" formado por una componente vectorial y un escalar no puede considerarse una cantidad física introducida de modo covariante cuando manejamos velocidades comparables con la de la luz. Sólo para velocidades $u << c$ adquiere la energía cinética el significado de un escalar tridimensional.

Cantidades como la mencionada arriba acerca de la energía cinética, poseen un significado físico definido únicamente en el caso de transiciones desde las representaciones tetradimensionales a las tridimensionales asociadas con un sistema de referencia especificado, es decir, cuando el principio de relatividad y la naturaleza tetradimensional del espacio-tiempo se ignoran. Este último procedimiento puede justificarse o bien en el caso $u << c$, o como sucedáneo de la teoría rigurosa con objeto de reconciliar la formulación tetradimensional con los conceptos tridimensionales del sentido común de la física clásica convencional. En verdad, si se ignora la covariancia relativista y se construye la teoría para un único sistema de referencia, los efectos relativistas pueden presentarse como correcciones que toman en cuenta el hecho de que la "masa inercial" m proveniente de las ecuaciones usuales de la mecánica (…) depende de la velocidad de acuerdo con la "ley" [$m = M(1 - u^2/c^2)^{-½}$]. Entonces la definición de la energía como la componente 0 del momento tetradimensional multiplicada por c, puede presentarse como la "ley de la naturaleza inercial de la energía", etc."

Difícilmente puede explicarse el nudo de la cuestión con mayor claridad que en la cita precedente. Es más, con toda nitidez su autor prosigue a través de unos párrafos demoledores [29]:

"Muchos de los malentendidos y paradojas surgidos en la interpretación de las fórmulas de la mecánica relativista se dan porque las así llamadas leyes que pueden justificarse sólo en una formulación tridimensional no covariante, se interpretan desde una perspectiva relativista tetradimensional.

En la teoría tetradimensional no hay un concepto de masa inercial como escalar que varíe con la velocidad, solamente el concepto de masa propia M indisolublemente vinculado al momento y la energía. Por consiguiente, la "ley de variación de la masa inercial con la velocidad" sólo puede incluirse en la teoría tetradimensional si se introduce una generalización de la masa inercial de la forma $m_\mu = p_\mu/c$. Sin embargo, semejante generalización es artificial, ya que el vector masa m_μ (…), además de un factor constante $1/c$, no difiere en absoluto del vector momento tetradimensional p_μ."

En efecto, la idea de una masa variable con la velocidad, nació y se extendió entre 1909 y 1912 entre los físicos que deseaban aferrarse a toda costa a las prácticas de la mecánica clásica, explicando con ella la progresiva disminución de la aceleración de una partícula cuando a ella se aplica una fuerza constante [30, 31, 32]. Desde ese punto de vista, el efecto inercial de la masa creciente, impide que la partícula exceda la velocidad de la luz. No obstante, son las propiedades geométricas del espacio-tiempo de Minkowski las auténticamente responsables de que resulte imposible alcanzar la velocidad c para un objeto acelerado por una fuerza constante. La contracción de las longitudes y la dilatación de las duraciones se confabulan para que la velocidad del móvil permanezca siempre inferior a la de la luz [35].

R. K. Wangsness [36], por ejemplo, ofrece a este respecto un párrafo altamente ilustrativo:

"Por otra parte, no es del todo necesario interpretar en esta forma dichos resultados, y el hacerlo así obedece al deseo natural de escribir el momento lineal como siempre, o sea, como el producto de la masa y de la *velocidad ordinaria* **v**, y no como el producto de la masa en reposo m_0 por una *nueva función* de la velocidad. De hecho, tal enfoque contradice la filosofía básica del planteamiento covariante de la Relatividad, en razón de que (28-106) no está en forma cuadrivectorial. Se tiene una mayor concordancia con los conceptos relativistas al adjudicar una propiedad escalar invariante –la masa en reposo m_0– a la partícula y después definir el momento cuadrivectorial como el producto de este invariante escalar con la velocidad cuadrivectorial, exactamente como se hizo en (28-99).”

La diferencia no es baladí, pues al manejar la primera en vez de la segunda nos sentimos irresistiblemente tentados a juzgar que hay una cantidad –la “masa”– que crece con la velocidad. Y dado que la masa es una medida de la inercia, o resistencia a la aceleración, es lógico que atribuyamos a su aumento la inaccesibilidad de c. Sin embargo no es así, ya que un escalar dependiente de la velocidad no tiene lugar en la estructura matemática covariante de la Relatividad. Es nuestra tendencia a considerar la teoría relativista como una corrección a la física de Newton cuando entran en juego muy altas velocidades, la que nos hace olvidar el nudo de la cuestión. Y éste no es más que la necesidad de que las cantidades relevantes en Relatividad sean, o bien escalares invariantes bajo cambio de referencial, o bien magnitudes tetradimensionales que obedezcan las transformaciones de Lorentz.

Explicado muy sucintamente, imaginemos dos observadores, acelerado el uno e inercial el otro (fácilmente distinguibles, pues se curva la línea de universo del primero y no la del segundo). Supongamos también que el observador no inercial acelera tan lentamente que podemos tratarlo formalmente sin gran error como si estuviese en una sucesión continua de sistemas inerciales instantáneos. Aceptando semejante aproximación, desde el referencial no acelerado se observa que el tiempo del observador acelerado se dilata de acuerdo con una aplicación reiterada de las fórmulas de Lorentz, con lo cual la velocidad, entendida como el cociente del espacio recorrido entre el tiempo empleado en recorrerlo, tiende a cero ya que el denominador tiende a infinito cuando su velocidad se aproxima a c. En cambio, desde el punto de vista del referencial acelerado, es el espacio que recorre en cada unidad de tiempo el que se contrae sin cesar tendiendo a cero a causa de dichas fórmulas lorentzianas. De nuevo el cociente del espacio entre el tiempo tiende a cero cuando la velocidad tiende a c, sin que sea en modo alguno necesario mencionar la masa en esta discusión.

V. CONCLUSIONES

A partir de los razonamientos anteriores parece desprenderse la pertinencia del método geométrico de Minkowski para explicar en toda su extensión el significado físico de la Relatividad Especial. En rigor, no sería correcto acudir a nociones como la de “masa variable con la velocidad” o “energía cinética relativista”.

Es la diferente descomposición que nosotros hacemos del tetravector 4-ímpetu en componentes según el sistema de referencia en el que nos encontremos, la que nos hace creer que energía y momento lineal son nociones físicas distintas. Ese es el precio a pagar cuando nos apegamos a la vieja visión tridimensional al adentrarnos en una teoría física enteramente basada en una perspectiva de cuatro dimensiones.

Todo ello reivindica la posición de quienes defienden la identificación de masa y energía como nombres diferentes que nuestra perspectiva ordinaria en tres dimensiones confiere a lo que en realidad son distintas manifestaciones de una misma propiedad. Desde un punto de vista tetradimensional contemplaríamos esa propiedad (que a falta de una mejor denominación llamamos “masa-energía”) como una característica de todos los sistemas físicos; característica que nuestra incapacidad de percibir directamente los intervalos espacio-temporales escinde en masa y energía, tal como escindimos el espacio-tiempo en espacio y tiempo. Uno de los más tempranos defensores de esta concepción, el británico Arthur Eddington, sugería [37]:

“(…), parece muy probable que masa y energía sean dos modos de medir lo que es esencialmente la misma cosa, en el mismo sentido en que el paralaje y la distancia de una estrella son dos maneras de expresar la misma propiedad de localización”.

Cuando dos magnitudes son iguales salvo un factor multiplicativo que resulta ser una constante universal, debemos sentirnos inclinados a sospechar que la distinción entre esas dos magnitudes se origina en el sistema de unidades que arbitrariamente hemos elegido para medirlas por pura comodidad o convenio. Palabras muy semejante en relación con otra igualdad, $E = h\nu$, en la que la energía aparece ligada ala frecuencia por la constante de Planck, han sido escritas por físicos de renombre, como Wichman [38]:

“(…), debido al papel fundamental que representan las constantes c y $\hbar$ en la física cuántica relativista, bien se pudiera elegir un sistema de unidades en el cual $\hbar = c = 1$. (…) ello significa que, por ejemplo, la masa, la energía y la frecuencia están siempre ligadas entre sí de la misma manera y podemos considerar las palabras "masa", "energía" y "frecuencia" como nombres diferentes de la misma cosa”.

Es por esto que la ecuación de Einstein debería ser entendida como la expresión de una identidad largamente ignorada por los investigadores del pasado. La masa y la energía serían así dos maneras distintas de nombrar el mismo concepto subyacente. Bien podríamos tener en mente lo que ocurre cuando medimos una misma distancia en kilómetros o en millas: dos sistemas de unidades diferentes (los kilómetros y las millas) nos sirven para expresar un mismo concepto de base (la distancia). Ese es el verdadero sentido de la fórmula de equivalencia entre la masa y la energía.

AGRADECIMIENTOS

El autor quisiera agradecer el apoyo recibido de la Sociedad Astronómica de Alicante, donde estas cuestiones

fueron expuestas y muy sagazmente debatidas antes de su elaboración por escrito.

También debo expresar mi gratitud por el intercambio de opiniones mantenido con el profesor Hans C. Ohanian, quien, pese a nuestras discrepancias de matiz, siempre me ha dispensado su mejor disposición y su más gentil amabilidad.

REFERENCIAS

[1] Alonso, M. y Finn, E., *Física*, vol. I (Fondo Educativo Interamericano, México, 1983).

[2] Ohanian, H.C., *Einstein's Mistakes: The Human Failings of Genius* (Norton & Co., Inc., New York, 2008).

[3] Bondi, H. and Spurgin, C.B., *Energy has mass*, Phys. Bull. **38**, 62 (1987).

[4] Aguelles, J., *Física COU* (Magisterio Español, Madrid, 1978).

[5] Alsina, J., *Fisica COU* (Teide, Madrid, 1979).

[6] Guillem, M., *Física COU* (De Marfil, Madrid, 1978).

[7] Lloris, A., *Física COU* (SM, Madrid, 1982).

[8] Olarte, M., *Física COU* (SM, Madrid, 1986).

[9] Gettys, W. E., Keller, F.J. and Skove, M.J., *Física Clásica y Moderna* (McGraw-Hill, Madrid, 1992).

[10] Tipler, F., *Física* , Vol. II (Reverté, Barcelona, 1992).

[11] Eddington, A., *The Mathematical Theory of Relativity* (Cambridge University Press, Cambridge, 1963).

[12] Terletskii, Y., *Paradoxes in the Theory of Relativity* (Plenum Press, New York, 1968).

[13] Sazánov, A., *El universo tetradimensional de Minkowski* (MIR, Moscú, 1990).

[14] Misner, Ch., Thorne, K. and Wheeler, J.A., *Gravitation* (Freeman, San Francisco, 1973).

[15] Einstein, A., *Notas Autobiográficas* (Alianza, Madrid, 1986).

[15] Rindler, W., *Essential Relativity* (Springer-Verlag, New York, 1977).

[16] Flores, F., *Interpretations of Einstein's Equation $E= mc^2$*, International Studies in the Philosophy of Science **19**, 245(2005).

[17] Flores, F., *On the Interpretation of the Equation $E= mc^2$: Response to Krajewski*, International Studies in the Philosophy of Science **20**, 217 (2006).

[18] Eddington, A., *Space, Time and Gravitation* (Cambridge University Press, Cambridge, 1968)

[19] Einstein, A., Infeld, L., *La Evolución de la Física* (Salvat, Barcelona, 1986).

[20] Terletskii, Y., *Paradoxes in the Theory of Relativity* (Plenum Press, New York, 1968).

[21] Zahar, E., *Einstein's Revolution: A Study in Heuristic* (Open Court, La Salle, Ill., 1989).

[22] Torretti, R., *Relativity and Geometry* (Dover, New York, 1996).

[23] Alemañ, R.A., *Relatividad para todos* (Equipo Sirius, Madrid, 2004).

[24] Flores, F., *Interpretations of Einstein's Equation $E= mc^2$*, International Studies in the Philosophy of Science **19**, 245 (2005).

[25] Maxwell, J. C., *A Treatise on Electricity and Magnetism*, vol. II, 1ª edición (Clarendon Press Oxford, 1873).

[26] Lebedev, P. N., *Untersuchungen über die Druckkräfte des Lichtes*, Annalen der Physik **6**, 433 (1901).

[27] Dubrovski, V., Smorodinski, Ya. y Surkov, E., *El Mundo Relativista* (MIR, Moscú, 1987).

[28] Kopilov, G. I., *Simplemente Cinemática* (Platón, Madrid, 1995).

[29] Alemañ, R. A., *Relatividad para todos* (Equipo Sirius, Madrid, 2004).

[30] Wheeler, J. A., *Un viaje por la gravedad y el espacio-tiempo* (Alianza, Madrid, 1994).

[31] Terletskii, Y., *Paradoxes in the Theory of Relativity* (Plenum Press, New York, 1968).

[32] Lewis, G. N., Tolman, R. C., *The Principle of Relativity and Non-Newtonian Mechanics*, Philosophical Magazine **18**, 510 (1909).

[33] Lewis, G. N., Tolman, R. C., *Non-Newtonian Mechanics: The Mass of a Moving Body*, Philosophical Magazine **23**, 375 (1912).

[34] Epstein, P. S., *Der ponderomotorischem Drehwdricungem einer Lamkhetwe zur die Impulssche der Etektronentheorie*, Annalen der Physik **35**, 779 (1911).

[35] Alemañ, R.A., *Relatividad para todos* (Equipo Sirius, Madrid, 2004).

[36] Wangsness, R., *Campos Electromagnéticos* (Limusa, Méjico, 1992).

[37] Eddington, A., *Space, Time and Gravitation* (Cambridge University Press, London, 1929).

[38] Wichmann, E.H., *Física Cuántica Berkeley Physics Course*, Vol IV, (Reverté, Barcelona, 1991).