

Búsqueda de orden y armonía en la naturaleza, descubriendo leyes de escala en el aula



Pablo Núñez¹, Silvia E. Calderón² y Salvador Gil³

¹Instituto de Industria de la Universidad Nacional de Gral. Sarmiento, Buenos Aires;

Instituto San José de Morón, Buenos Aires.

²Instituto Superior del Profesorado J. V. González. Ayacucho 632, Ciudad de Buenos Aires.

³Universidad Nacional de San Martín, Campuzo Miguelete, M. de Irigoyen 3100, San Martín (1650), San Martín, Buenos Aires.

E-mail: panunez@ungs.edu.ar

(Recibido el 5 de Octubre de 2009; aceptado el 23 de Diciembre de 2009)

Resumen

En este trabajo se propone un conjunto de actividades susceptibles de realizarse en el aula, que permiten estudiar y “descubrir” leyes de escala presentes en diversos sistemas. El objetivo es desarrollar actividades de investigación aplicables en la enseñanza de la física y ciencias naturales de las escuelas medias, utilizando elementos de bajo costo, fácilmente accesibles y empleando nuevas tecnologías. Las actividades propuestas ilustran el modo en que la ciencia busca regularidades, y como a partir de estas regularidades infiere leyes que nos ayudan a comprender el mundo que nos rodea. En particular nos proponemos estudiar sistemas biológicos y físicos comunes en la vida cotidiana. Más específicamente estudiamos la dependencia entre la masa y el tamaño en animales, frutos y hojas de plantas. Estas actividades muestran un modo posible de llevar adelante proyectos de investigación en escala reducida de tiempo con estudiantes principiantes, empleando una metodología científica y usando nuevas tecnologías de fácil acceso.

Palabras clave: Leyes de escala, descubrimiento de ley física, TIC's, modelización.

Abstract

A number of class activities to study and “discover” scaling laws present in several systems are proposed. The main goal of this proposal is to carry out research projects adequate for the teaching of Physics and Natural Sciences in High School courses, using easily available, very low cost elements, and making use of new technologies. These activities illustrate the way that science searches for regularities, and how these patterns allow us to infer “laws” in the world around us. In particular, we study biological and physical systems present in daily life. More specifically, we study the dependence between the size and mass of leaves of different plants, fruits, animals, etc. These activities show how research projects can be pursued with beginner students, illustrate the scientific method and require little previous knowledge and make use of new technologies easily available.

Keywords: Laws of scale, discovery of Physics law, ICT's, modeling.

PACS: 01.40.Ej, 07.05.Kf, 47.53.+M, 87.15.Aa, 87.15.La, 89.75.Da

ISSN 1870-9095

I. INTRODUCCIÓN

Las leyes de escalas son importantes en muchas ramas de las ciencias. En particular en la física y biología son frecuentes las llamadas *leyes alométricas* que se expresan como una relación potencial entre dos variables de la forma:

$$y = A_0 x^b, \quad (1)$$

donde x es una variable independiente, y la variable dependiente, y A_0 y b son dos parámetros del sistema en estudio. Un ejemplo se presenta en la relación que hay entre el ritmo respiratorio y el tamaño de animales vertebrados. En

este caso la variable y representa el ritmo o frecuencia respiratoria y x puede ser la masa o longitud del animal. [1, 3]. Otros ejemplos de leyes alométricas de la forma (1) en la física son la relación entre el período de un péndulo simple, T , y su longitud L :

$$T = 2\pi/\sqrt{g} \cdot L^{1/2}, \quad (2)$$

y la relación entre el período T de los planetas y su distancia media al Sol, d , conocida como tercera ley de Kepler [4]:

$$T = k \cdot d^{3/2}. \quad (3)$$

Estas leyes de escalas se manifiestan también en muchos otros sistemas simples. Por ejemplo en un cubo su área es proporcional a la medida del lado L al cuadrado, es decir:

$$A = 6L^2 \Rightarrow A \propto L^2, \quad (4)$$

y su volumen V :

$$V = L^3. \quad (5)$$

En estos casos las variables dependientes A y V varían con distintas potencias de L .

Una propiedad importante de la Ec. (1), es que cuando se grafica $\log y$ en función de $\log x$, la dependencia entre estas nuevas variables es lineal [5]:

$$\log y = \log A_0 + b \cdot \log x. \quad (6)$$

La expresión (4) permite inferir que si al representar gráficamente $\log y$ en función del $\log x$ en escala $\log\text{-}\log$, los datos se alinean, la relación entre y y x es del tipo (1). La pendiente de la línea de tendencia es el valor del exponente b y el parámetro A_0 se obtiene de la ordenada en el origen [5].

Es interesante señalar, que aunque los sistemas biológicos son uno de los sistemas más complejos de la naturaleza, muchas de sus propiedades fundamentales pueden expresarse por medio de leyes alométricas, extremadamente simples en función del tamaño o de la masa. Ejemplo de este tipo de relaciones simples es la correspondencia entre la tasa metabólica basal (BMR) de un animal y su masa, M . La BMR es la tasa de mínimo consumo de energía o potencia mínima para que un animal se mantenga vivo. Esta relación se conoce como ley de Kleiber [1, 2, 6] y se expresa como:

$$BMR = A_0 \cdot M^{3/4}. \quad (7)$$

Esta ley se cumple para una gran variedad de especies, cubriendo un rango de variación de masa de más de 25 órdenes de magnitudes. Este patrón o sistemática abarca desde bacterias hasta ballenas azules. Otros ejemplos de este tipo de relaciones son la correlación entre el ritmo respiratorio y la masa, y la longevidad de un animal y su masa.

Las leyes de escalas desafían y a la vez guían a los investigadores en la búsqueda de modelos que intenten explicarlas. De hecho estas sorprendentes relaciones y sus implicancias han recibido considerable atención y se han convertido en una de las fronteras de investigación más activas de los últimos años [1, 3, 6, 7]. Recientemente West, Brown y Enquist [2, 6], propusieron que la prevalencia en la biología de estas leyes de escala no es casual ni una coincidencia estadística sino por el contrario, la evidencia de un mecanismo general y común presente en todos los organismos vivos. Más específicamente estos autores proponen que todos los animales para su subsistencia

dependen de la integración de varias subunidades: moléculas, células, tejidos y órganos. Estas subunidades deben permitir la llegada de nutrientes, energía, información y remoción de residuos en forma eficiente. Para ello, la mayoría de los seres vivos disponen de redes que abarcan todo el cuerpo del animal: sistema circulatorio, respiratorio, neuronal, renal, etc. que tienen una conspicua estructura fractal como se ilustra en la figura 1. Estas redes tienen terminales que son las mismas para todos los seres vivos (capilares) y que abarcan toda su masa. La selección natural optimiza y selecciona estas estructuras de modo que ellas minimizan la energía para distribuir de nutrientes a todo el organismo. Con estas suposiciones, fue posible dar una explicación muy adecuada a la relación (1) y muchas otras de este tipo [2, 6].

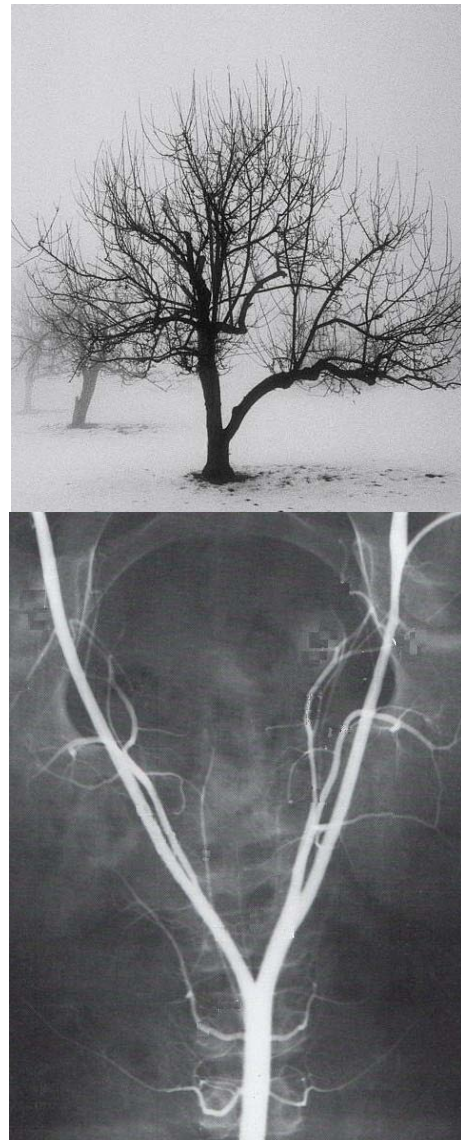


FIGURA 1. Panel superior, un árbol en invierno. Panel inferior, angiografía de una arteria humana. La similitud entre estas dos imágenes es aparente como así también su estructura fractal.

Otras observaciones, simples de realizar, permiten relacionar la altura de los árboles con el diámetro de sus troncos. Estos principios biomecánicos han sido estudiados en muchos sistemas y tiene mucha utilidad para comprender la arquitectura de las plantas.

También se encontraron relaciones alométricas como la formulada en (1) en diversas áreas de la tecnología, las matemáticas y el lenguaje. Un ejemplo se presenta en la relación entre la velocidad de crucero y las dimensiones de las alas de casi todos los animales y máquinas que vuelan [1, 8].

Además, en muchos sistemas estadísticos, como el número de personas que habitan pequeños pueblos y ciudades del mundo, la ocurrencia del primer dígito en estos datos no se presenta al azar sino que sigue una relación bien definida, descrita por la ley de Benford [9]. Asimismo en un dado texto, en casi todos los idiomas, hay palabras que se repiten. Si se ordenan las palabras que más veces se repiten y a su ubicación en este ranking de repetición lo designamos n , se encuentra que las veces que aparece una dada palabra, o sea su frecuencia de ocurrencia f , es inversamente proporcional a n , o sea $f \propto n^{-1}$. Esta relación se conoce como Ley de Zifp, [1, 9] y es muy simple de observar y analizar.

Muchas de estas observaciones también se pueden expresar por leyes de conservación. La ley de Zifp antes descrita, se puede enunciar diciendo que en un texto el producto de fn es constante, es decir, que el producto de la frecuencia de ocurrencia de una palabra y su orden en el ranking de repetición se conserva.

Otros sistemas donde pueden estudiarse relaciones alométricas muy particulares son los fractales. La estructura fractal es prevalente en la naturaleza y se caracteriza por la semejanza entre una pequeña parte del sistema y el todo, es decir que presenta auto-semejanza para todas las escalas [10]. Este tipo de estructura se pueden observar en un árbol, un helecho, el sistema circulatorio o renal, en frutos y plantas como el brócoli y coliflor, etc. La investigación de sistemas biológicos que presentan este tipo de estructura, como veremos, revela relaciones alométricas muy particulares que son características de estos sistemas.

Las actividades que a continuación presentamos, permiten encontrar relaciones alométricas en diversos sistemas naturales y culturales, los cuáles son abordados usando técnicas de análisis gráfico [5, 9]. Para este fin utilizamos las ventajas que nos brindan las hojas de cálculo como por ejemplo Excel® de Microsoft. Se estudia además una serie de ejemplos acerca de relaciones entre latidos y masa corporal para animales que se asocian a leyes metabólicas de interés para comprender las similitudes en las estructuras presentes en especies de variado volumen corporal [6, 7].

La idea de aplicar estas técnicas de análisis e investigación en sistemas biológicos se debe a que las hojas, frutos, árboles, animales y personas son parte de mundo habitual de los estudiantes y de sus entornos. Por otra parte, sirven para ilustrar como los métodos de la ciencia son aplicables a diversos sistemas y encontrar resultados

sorprendentes, no muy explotados en los cursos escolares convencionales. No menos importante en esta elección es que los experimentos propuestos son de bajo costo y accesibles a todas las escuelas.

II. MODELIZACIÓN

Modelizar es generar una teoría o algoritmo para aproximar y/o simular el comportamiento de un sistema real o una parte del mismo y es una actividad de mucha utilidad en las ciencias y en la tecnología. La relación entre el modelo y el sistema real es análoga a la que existe entre el mapa y el territorio al que hace referencia. El modelo debe reproducir los aspectos más relevantes del sistema en estudio y permitir explicar las relaciones entre las variables involucradas. Una vez elaborado un modelo, se lo somete a prueba usando los datos reales. Si el modelo reproduce bien el comportamiento del sistema, es posible usarlo para recrear situaciones reales o ficticias que puedan ocurrir en el futuro.

Modelizamos la hoja de una planta utilizando una forma prismática, similar a la representada en la figura 2. Claramente rara vez una hoja de una planta tiene esta forma, pero el modelo simplificado de la misma puede explicar algunas de sus propiedades mecánicas. Planteamos las siguientes hipótesis acerca de la dependencia funcional de la masa m de una hoja de planta con respecto de su dimensión mayor o longitud l .

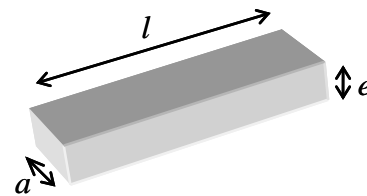


FIGURA 2. Modelo prismático de una hoja de planta, caracterizado por un ancho a , largo l y espesor e .

Dado que para una planta, sus hojas tienen una relación de semejanza, suponemos que el ancho a es proporcional a la longitud, o sea $a=kl$, siendo k una constante de proporcionalidad. La masa m es el producto del volumen $V=ela$ con la densidad ρ :

$$m = \rho a e l = \rho k e l^2 . \tag{8}$$

Si el espesor e es constante, concluimos que:

$$m \propto l^2 . \tag{9}$$

Si el espesor disminuyese lentamente con la superficie foliar, es decir: $e=cl^{-\epsilon}$ con $1>\epsilon>0$ y tendríamos que la relación entre la longitud y la masa sería:

$$m \propto l^{2-\epsilon} . \tag{10}$$

En cambio si el espesor aumentase lentamente con la superficie foliar, tendríamos que: $e=c.l^\epsilon$ con $l>\epsilon>0$, y:

$$m \propto l^{2+\epsilon} \quad (11)$$

Finalmente si el espesor fuese proporcional a la magnitud l , es decir si $e \propto l$, entonces tendríamos:

$$m \propto l^3 \quad (12)$$

A continuación aplicaremos estas consideraremos en un estudio realizado sobre un conjunto de hojas de una misma planta.

III. MEDICIONES REALIZADAS

A. Hojas de plantas

Se recogen hojas de una misma planta teniendo en cuenta que las hojas tengan una gran variación de tamaños siendo que la relación existente entre la más pequeña y la más grande sea un factor de 3 o mayor. En nuestro caso utilizamos hojas de Adelfa o Nerium, que se muestran en la figura 3. Con una balanza analítica de precisión (apreciación 0,1g) se midió para cada hoja su masa m , su longitud l y su ancho a (ver figura 3). Las longitudes fueron medidas con una regla graduada en milímetros.

En las figuras 3 y 4 se muestran los resultados obtenidos.

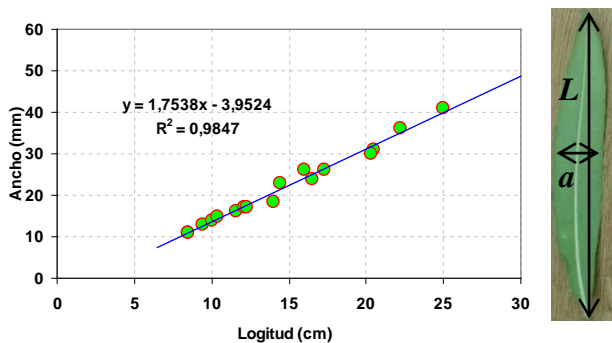


FIGURA 3. Aquí se observa el gráfico correspondiente a la relación entre el ancho y el largo. La linealidad nos indica que existe una proporcionalidad entre el largo y el ancho en las hojas analizadas. En la parte lateral derecha se observa una hoja de Adelfa o Nerium y sus dimensiones.

De la figura 3 se concluye que $a \propto l$, que confirma la observación evidente que las hojas de una misma planta son semejantes. Esto es, las hojas más grandes se obtienen por una ampliación de las más chicas.

En la Figura 4 se representa la masa m en función de la longitud l . Para las hojas estudiadas (Adelfa) encontramos la relación alométrica:

$$m = A_0 L^b, \text{ con } A_0=0,0026 \text{ y } b=2,21. \quad (9)$$

El hecho que el exponente es mayor de 2, $b > 2$, según el modelo propuesto indica que las hojas, al crecer en tamaño, también tienen un crecimiento en su espesor que no es proporcional a l . De otro modo m sería proporcional a l^3 . Según (11), el espesor aumenta con la longitud como: $e \propto l^\epsilon$, con $\epsilon=0.21$. Esta dependencia, puede interpretarse como una competencia entre dos tendencias de la hoja:

- a) a maximizar su área, que optimizaría su función de realizar fotosíntesis al tener mayor superficie expuesta al Sol,
- b) incrementar el espesor para dar mayor resistencia mecánica que sostenga mejor el peso de hojas de mayor tamaño.

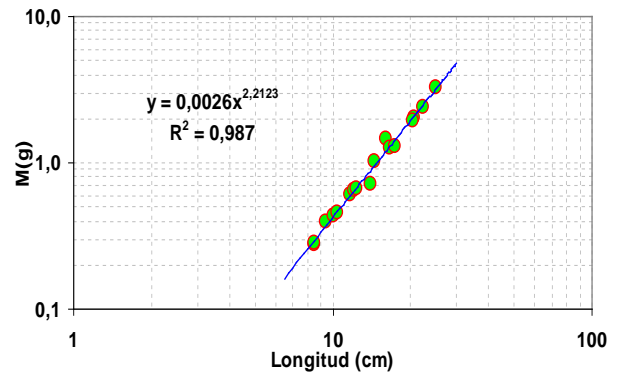


FIGURA 4. En este gráfico observamos como la masa se ajusta a una función potencial de la longitud con exponente $b=2 + \epsilon$, con $0 < \epsilon = 0.21 < 1$.

B. Estudio de brócoli

Se procedió a medir la masa y la longitud de muestras semejantes de cortes de brócoli. Para preservar la proporción de los tamaños de las muestras, estas se cortaron de una misma planta, manteniendo la relación ancho (a) y altura o longitud (L) aproximadamente iguales, ver figura 5. A esta dimensión de las muestras la denominamos su longitud. El brócoli tiene una clara estructura fractal.

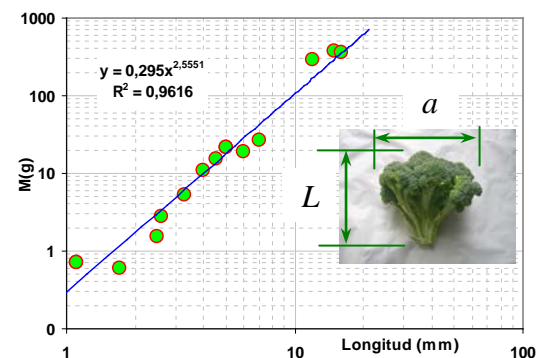


FIGURA 5. Resultado de la relación entre la masa y la longitud (L) de las ramas de un brócoli.

En la Figura 5 se presentan los resultados de las masas de las distintas muestras en función de sus longitudes. Nuevamente

se presenta una relación alométrica, pero esta vez el carácter fraccionario de la dependencia es evidente. El valor del exponente en este caso es: $d=2,55$ consistente con la estructura fractal del brócoli.

C. Helecho plumoso

Un tipo de helecho que puede encontrarse en los jardines de las casas es el llamado helecho plumoso o *Asparagus setaceus*. Este tipo de helecho tiene también una estructura fractal.

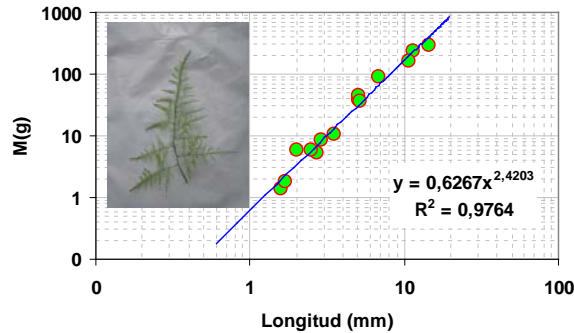


FIGURA 6. Resultado de la relación entre la masa y la longitud de las ramas de un helecho plumoso.

En este caso procedimos a cortar muestras de distintos tamaños y medimos la longitud con una regla milimetrada y sus masas con una balanza analítica de precisión. Los datos se muestran en la figura 6. Puede observarse que el valor del exponente b es también fraccionario y consistente con lo que esperamos para una sistema con estructura fractal.

D. Mediciones en ratas

Otras situaciones donde es interesante estudiar la relación de masa con el tamaño, es el caso de animales. En particular, en este trabajo estudiamos ratas de laboratorio del tipo BDIX. En este caso medimos dos longitudes: la de su cola y la del cuerpo, medida desde origen de la cola a la punta de la nariz del animal, y encontramos que el largo de la cola es proporcional a la longitud del cuerpo.

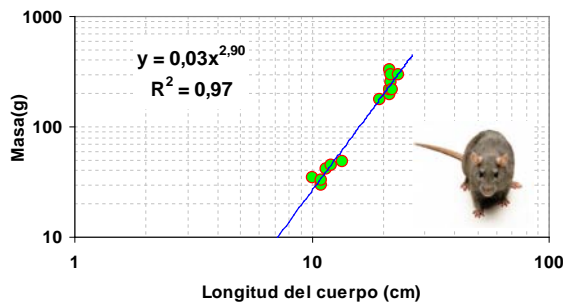


FIGURA 7. En este gráfico se observa como la masa está en relación del cubo de la longitud de las ratas.

En la figura 7 se muestran los resultados de las masas de las ratas en función del largo de sus cuerpos. La relación entre la masa y el tamaño, sigue una ley alométrica con un exponente muy próximo a 3, indicando que las ratas, al igual que muchos animales, tiene una proporcionalidad tridimensional.

Este tipo de relación, también se encuentra en otros objetos con simetrías tridimensionales. En la figura 8, se muestra la relación entre la masa de tuercas hexagonales de distintos tamaños en función de su diámetro externo.

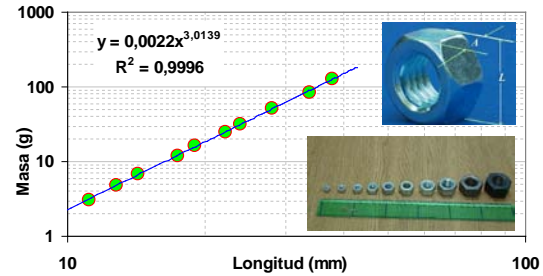


FIGURA 8. En este gráfico se observa como la masa está en relación del cubo del diámetro o longitud (L) de las tuercas.

En este caso de nuevo encontramos una relación alométrica, con un exponente muy próximo a 3, consistente con la proporcionalidad tridimensional de las tuercas. Este tipo de relación, es también esperable en el caso de frutos de una misma variedad.

IV. EXPERIMENTOS CON ÁRBOLES

Otro caso interesante y muy accesible de estudiar es la dependencia del diámetro medio \bar{D} de las ramas de un árbol en función del orden de bifurcación N . Se mide el diámetro del tronco principal \bar{D}_1 que corresponde a $N=1$, luego ascendemos por el mismo hasta la primer bifurcación. Allí se miden los diámetros de las ramas y se obtiene un promedio correspondiente al diámetro \bar{D}_2 correspondiente a la bifurcación $N=2$, y así siguiendo con el resto de las ramas. Estas mediciones pueden tomarse sobre un árbol real o bien sobre una fotografía de un árbol. En particular las mediciones de los diámetros sobre una fotografía digital pueden obtenerse a partir de las distancias de los puntos diametralmente opuestos con ayuda de programas de imágenes como el Paint de Microsoft®. La técnica consiste en tomar las coordenadas provistas en píxeles sobre la imagen por estos programas y aplicar la relación de distancia entre dos puntos [11]:

$$d = \sqrt{(A_x - B_x)^2 + (A_y - B_y)^2} . \quad (10)$$

Mediante esta expresión, que es el Teorema de Pitágoras en el plano cartesiano, determinamos los valores del diámetro de las ramas del árbol mostrado en la figura 9.

La relación entre el diámetro de las ramas y el nivel de bifurcación se muestra en la figura 10 y puede observarse que existe una relación lineal entre el diámetro y $1/N$.

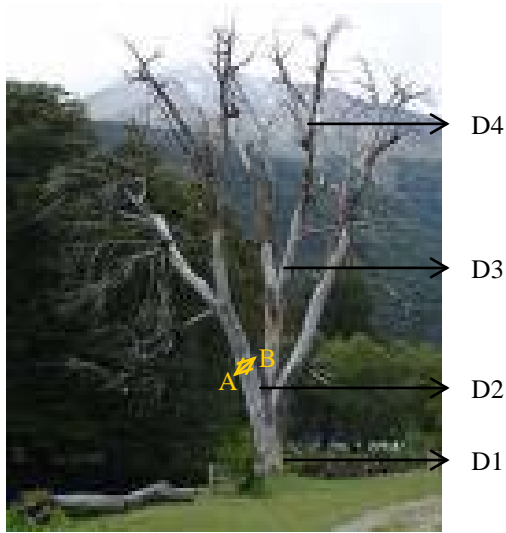


FIGURA 9. En la imagen de este árbol se han medido en pixeles los diámetros y se los ha vinculado con el nivel de ramificación.

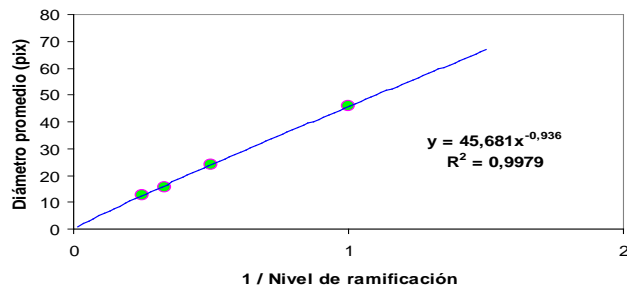


FIGURA 10. El gráfico muestra una relación funcional bien definida entre el diámetro y el nivel de ramificación del árbol.

A continuación presentamos un experimento donde se miden los diámetros del tronco y ramas siguientes de un árbol como muestra la figura 11.

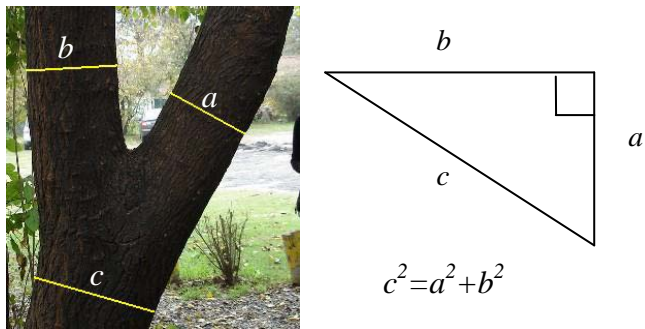


FIGURA 11. Aquí se muestran los diámetros trazados sobre la foto del tronco de un árbol. Los diámetros se obtienen de la medición del perímetro del tronco. Al cociente entre el perímetro y π lo denominamos diámetro medio. La relación entre estos parámetros es similar a la dada por el teorema de Pitágoras.

Hace 5 siglos, Leonardo Da Vinci observó que la suma de las áreas de las ramas siguientes es igual al área del tronco inicial. En otras palabras, el área de una dada rama es la misma antes y después de una ramificación [12]. Para la figura 11, esta relación se puede escribir como:

$$c^2 = a^2 + b^2. \quad (11)$$

Esta expresión se puede interpretar como una relación pitagórica entre los diámetros de una rama antes y después de una ramificación.

Un modo de evaluar en qué medida se cumple la relación (11), consiste en utilizar el teorema del coseno. Para un triángulo cualquiera de lados c , a y b tenemos que:

$$\cos \phi = (-c^2 + a^2 + b^2) / 2ab, \quad (12)$$

donde ϕ , es el ángulo entre los lados a y b , opuesto a c . Si ϕ es próximo a 90° , o sea si el triángulo es aproximadamente rectángulo, $\cos \phi \approx 0$. Si se grafica $\cos \phi$ para cada ramificación de un árbol, definido por la ecuación (12), como función del diámetro antes de la bifurcación, se puede evaluar en qué medida se cumple la relación (11) para un árbol real. Los diámetros fueron medidos usando la técnica de medición basada en imágenes digitales descrita anteriormente.



FIGURA 12. Sobre esta foto se ha tomado la medida de los diámetros de una rama y su bifurcación de modo de aplicar la relación (12).

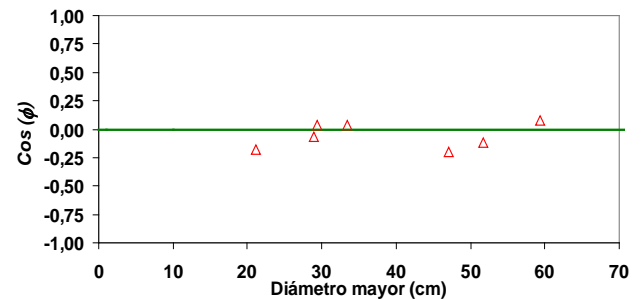


FIGURA 13. Gráfico donde se indican las desviaciones respecto de la relación pitagórica propuesta para las bifurcaciones de las ramas del árbol de la figura 12.

En la figura 13 se muestran los datos de $\cos\phi$ en función del diámetro antes de la bifurcación. Puede observarse que la relación (11) se cumple con buena aproximación.

Una consecuencia importante de esta relación es que podemos estimar la cantidad total de madera de un árbol mediante un único tronco de sección constante e igual a la del tronco principal y altura igual a la altura total del árbol, como se ilustra en la figura 14.

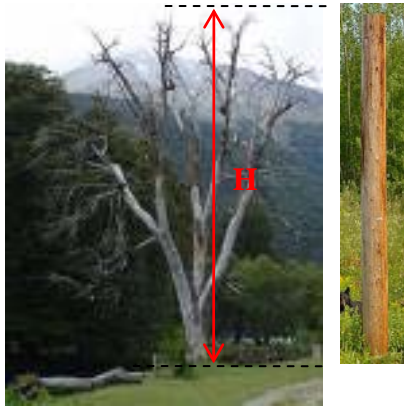


FIGURA 14. Aquí se muestra el significado cualitativo de la relación propuesta por Leonardo Da Vinci respecto de la conservación del área a pesar de las ramificaciones.

V. OTRAS RELACIONES EN ANIMALES

A continuación presentamos algunas leyes de escala que describen características biológicas en animales relacionadas con el ritmo cardíaco (figura 15), la longevidad (Figura 16) y el número total de latidos en la vida.

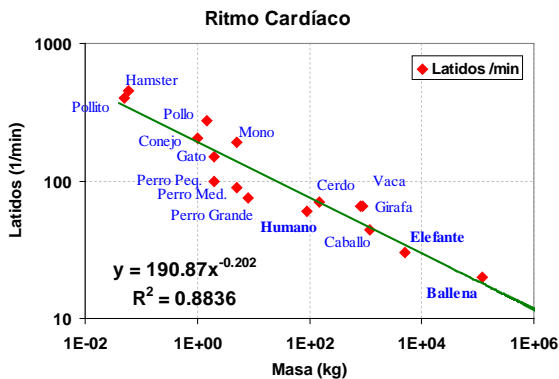


FIGURA 15. Este gráfico muestra la tendencia lineal decreciente del ritmo cardíaco en vertebrados de seis órdenes de magnitud respecto de la masa corporal.

Al multiplicar el ritmo cardíaco por la esperanza de vida para cada vertebrado presentado en los dos gráficos anteriores, obtenemos el número total de latidos a lo largo de toda la vida del animal. En la figura 17 se muestra este producto como función de la masa. Claramente se observa que esta

cantidad es aproximadamente la misma para todos estos animales. En otras palabras, el número total de latidos en los animales se conserva o sea es el mismo para todas las especies.

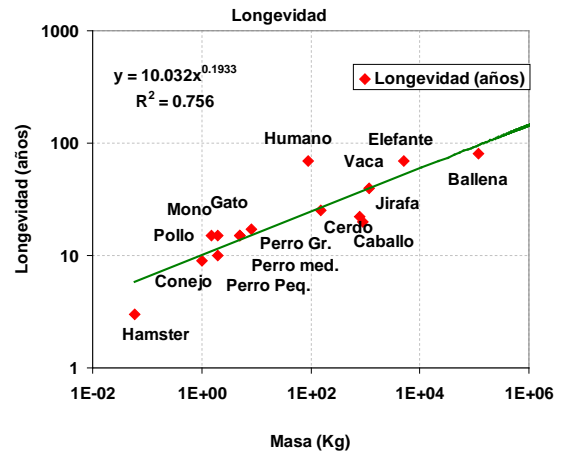


FIGURA 16. Este gráfico muestra la tendencia lineal creciente de la longevidad o esperanza de vida en vertebrados de seis órdenes de magnitud respecto de la masa corporal.

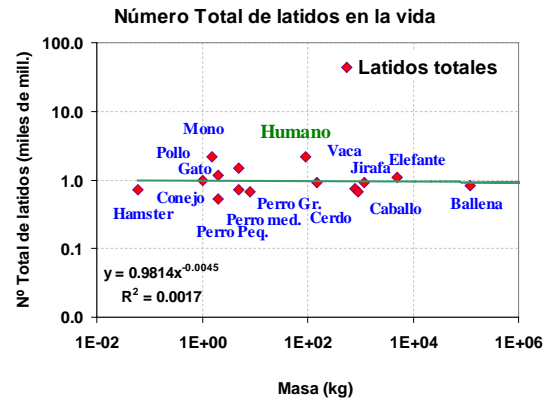


FIGURA 17. El gráfico muestra la constancia del número de latidos para la variedad de los vertebrados mostrados.

VI. CONCLUSIONES

Aquí se han presentado una serie de actividades que recrean leyes de escala de fácil implementación en cursos de la escuela media y que permiten tener un acercamiento al descubrimiento o redescubrimiento de leyes en la naturaleza.

Los proyectos se pueden realizar fácilmente en el aula y usarse como ejemplificadores de proyectos de investigación escolar pues ilustran varias de las facetas de la metodología científica.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a la Dr. A.E. Schwint por facilitarnos los datos de las ratas BDIX y por la atenta lectura del manuscrito. También agradecemos a N. Olivieri por las sugerencias realizadas. A la Asociación Física Argentina por la asistencia otorgada a través del Proyecto INVOFI, que permitió para desarrollar este proyecto.

REFERENCIAS

- [1] Wiesenfeld K. *Resource Letter: ScL-1: Scaling laws*, Am. J. Phys. **69**, 938-942 (2001).
- [2] West G. B., Brown J. H., *Life's Universal Scaling Laws*. Physics Today, 36-42 (2004).
- [3] McMahon, T., *Size and Shape in Biology*, Science, **179**, 1201-1204 (1973)
- [4] Wilson, J. D., *Física*, (Prentice Hall. México, 1996).
- [5] Gil, S., Rodríguez, E., *Física re-Creativa. Experimentos de física usando nuevas tecnologías*, (Prentice Hall, Buenos Aires, 2001).
- [6] Enquist, B. J., *Universal scaling in tree and vascular plant allometry: toward a general quantitative theory linking plant and function from cells to ecosystems*, Tree Physiology **22**, 1045-1064 (2002).
- [7] Wang, Z., O'Connor, T., Heshka, S. and Heymsfield, A. B., *The Reconstruction of Kleiber's Law at the Organ-Tissue Level*, The journal of nutrition. 2967-2970 (2001)
- [8] Tennkes, H., *The Simple Science of Flight, From Insect to Jumbo Jets*, (MIT Press, Ma. 1997).
- [9] Deacon, C., *The importance of graphs in undergraduate Physics*, The physics Teacher **37**, 270-274 (1999).
- [10] Mandelbrot, B. *Los Objetos Fractales*, (Tusquets Eds S.A., Barcelona, 2000).
- [11] Calderón, S.; Núñez, P. y Gil, S. *Cámara digital como instrumento de laboratorio: estudio del tiro oblicuo*, Lat. Am. J. Phys. Educ. **3**, 84-92, (2009).
- [12] James H. Brown, Geoffrey B. West. *Scaling in Biology*. Oxford University Press, New York, 2000.