

# Geometría de equilibrio de estructuras en arco



**Emilio Cortés**

*Departamento de Física, Universidad Autónoma Metropolitana, Iztapalapa  
Apdo. Postal 55-534, México D.F., 09340 México*

**E-mail:** emil@xanum.uam.mx

(Recibido el 29 de Febrero de 2008; aceptado el 31 de Marzo de 2008)

## Resumen

El estudio de la estática de cuerpos continuos es un tópico que cobra especial interés cuando la geometría juega un papel crucial y la solución intuitiva no se da en forma evidente. En este trabajo se analizan estructuras de arco en una dimensión, o eje curvo, cuando se someten a su propio peso o bien a una cierta carga dada. Se parte de los principios fundamentales del equilibrio de fuerzas y se obtienen fórmulas generales para el cálculo de momentos (torcas) flexionantes así como fuerzas cortantes y de compresión, para estructuras con geometrías específicas. Por otro lado, se plantea el problema de encontrar la forma geométrica del arco que lleve al equilibrio de la estructura, bajo las condiciones de carga elegidas. Este estudio, que puede ubicarse dentro de la física aplicada, no pretende tener una cobertura ni un enfoque ingenieril de las estructuras en arco. Consideramos que este trabajo aporta varios elementos didácticos sobre principios físicos fundamentales que, traducidos al lenguaje del análisis vectorial y del cálculo, nos llevan a resultados físicos y geométricos interesantes, tanto por su aplicación como por su posible contribución al mejor entendimiento de los conceptos y la herramienta de análisis empleados.

**Palabras clave:** Física educativa, enseñanza de la mecánica, equilibrio y geometría.

## Abstract

The study of statics of continuous bodies kindles special interest when the geometry plays a crucial role and the intuitive guess is not very evident. Here we analyze arc structures in one dimension, or curve axis, when they are subjected to its own weight or to a certain given load. We start from the fundamental principles of equilibrium of forces and obtain general expressions for the bending moments (torques) as well as shear and compression forces in the structures. In the other hand, we go to the problem of how to find the arc geometry which yields equilibrium, under prescribed conditions. This study which can belong to applied physics, does not intend to have an engineering point of view neither a broad coverage, about the arc structures. We consider that this work contains didactic elements of fundamental physical principles, which, translated to the language of vector analysis and calculus, brings us to physical and geometric results that can be interesting both, for its applications as well as for its possible contribution to the understanding of concepts and analysis used.

**Keywords:** Educational physics, mechanics teaching, equilibrium and geometry.

**PACS:** 01.40.-d, 01.40.Fk, 01.40.Jp, 01.55.+b.

## I. INTRODUCCIÓN

El arco es un elemento estructural en la arquitectura y en la ingeniería civil, que lleva a cabo como funciones cubrir claros, soportar cargas, así como constituir un elemento estético. Una amplia gama de formas geométricas de arcos han sido construidos desde la antigüedad [1]. Los romanos usaron el arco semicircular en puentes, acueductos y arquitectura de gran escala; este tipo de arco consistía en la unión de bloques de tabique o piedra, dispuestos en forma circular. En estas estructuras los bloques se mantenían en su posición debido a su geometría y a la fuerza de compresión que actúa a lo largo del eje del arco. Los principios geométricos jugaron un papel muy importante en el diseño de arcos estructurales a través de la historia, especialmente en tiempos anteriores al conocimiento de las leyes físicas [2]. Otros diseños de arcos han pasado a la historia, los que fueron concebidos

más por su forma estética que por su funcionalidad [1]. Tal es el caso del arco de herradura en las mezquitas árabes, el arco gótico de la Edad Media, así como el *arco falso* en los templos mayas. Además de estas formas continuas, se han diseñado arcos en forma de estructuras poligonales, cuya construcción en algunos casos ofrece ventajas prácticas.

Los arcos modernos son hechos de acero, concreto y madera laminada y se construyen en una variedad de combinaciones de elementos estructurales, donde algunos de estos elementos trabajan a compresión y otros a tensión.

Dentro de los campos de la ingeniería civil y de materiales, el diseño de estructuras en arco en una dimensión o eje curvo (o bien cascarones en dos dimensiones), encierra un gran interés, tanto por sus aplicaciones, como por el análisis teórico del equilibrio y la estabilidad de este tipo de estructuras. En la literatura sobre el campo [3, 4] encontramos que existen, estructuras

hiperestáticas e isoestáticas. En las hiperestáticas o estáticamente indeterminadas las restricciones reactivas del material son más que las estrictamente necesarias para la estabilidad. Estas estructuras podemos decir que siempre trabajan en equilibrio, a expensas de la resistencia del material, y esto hace necesario incorporar al análisis estático, el comportamiento elástico y otras propiedades de los elementos de la estructura. Por otro lado, en las estructuras isoestáticas o estáticamente determinadas podemos calcular los parámetros físicos que actúan sobre la estructura, y analizar condiciones de equilibrio estático, independientemente de la intervención de la resistencia del material. En estructuras tridimensionales utilizadas en la construcción, en general dicho equilibrio siempre está garantizado por la geometría de la estructura y por los múltiples apoyos de ésta. Sin embargo, en la estructura de arco simple, domo o cascarón, donde podemos tener claros grandes y pocos apoyos, el equilibrio estático y la estabilidad pueden ser factores clave en el diseño. Una amplia variedad de libros y textos de ingeniería mecánica exponen en forma muy detallada los conceptos de la estática de estructuras, [5, 6, 7, 8] e incluyen en alguno de sus capítulos el análisis de estructuras en arco; sin embargo, hasta donde fue posible conocer, en ninguno de ellos se enfoca el estudio en la forma sistemática y didáctica en que se presenta en este trabajo.

Cabe destacar una estrecha relación entre el equilibrio de los arcos y su estabilidad. En la práctica un arco construido de piedra, madera o hierro, puede tener una cierta estabilidad aún bajo una geometría arbitraria, debido a la resistencia del material, es decir que cada sección del arco puede quedar sometida a esfuerzos y momentos considerables, los cuales son contrarrestados por fuerzas y momentos reactivos. Sin embargo, si su diseño obedece a una geometría de equilibrio, las fuerzas y momentos reactivos serán pequeños y sólo actúan para evitar la desviación de la estructura de ese equilibrio.

Como ejemplo de este hecho comparemos una viga en forma de cantiléver, es decir, colocada horizontalmente y empotrada en uno sólo de sus extremos, con otra viga en posición vertical empotrada en el suelo. Si la primera se encuentra en equilibrio, significa que la viga proporciona momentos y fuerzas reactivas que impiden que caiga o que se flexione. En cambio en la segunda el equilibrio está dado por su colocación vertical y las fuerzas y momentos reactivos son pequeños y sirven para mantener dicha posición. De esta forma, la geometría de equilibrio, además de repercutir en economía de material, requerirá menor esfuerzo de la estructura y por tanto gozará de mayor estabilidad.

Para abordar este estudio consideramos conveniente partir de un análisis estático de arcos simétricos articulados en ambos puntos de su base así como en su cúspide. Ver figura 1. Cada punto articulado, por hipótesis, deberá quedar libre de torcas, es decir, de momentos flexionantes. En todo este trabajo analizaremos este tipo de arcos, comúnmente llamados arcos triarticulados, sometidos a diferentes distribuciones de carga (también simétricas).

Estudiaremos tanto el caso de estructuras discretas, formadas por la concatenación de segmentos rectos, como el caso de estructuras continuas. Observaremos cómo las condiciones de equilibrio impuestas nos llevan, en el caso discreto a sistemas de ecuaciones trascendentes, mientras que en el caso continuo, se obtienen ecuaciones algebraicas o bien diferenciales no lineales, cuya solución obtenemos en forma analítica, para dos distintas distribuciones de carga dadas.

En la siguiente sección iniciamos nuestro estudio con el caso discreto, es decir con arcos poligonales. Consideraremos aquí que los arcos están sometidos a su propio peso. Se hace un análisis estático de momentos y fuerzas que actúan en los distintos vértices; se plantea entonces el problema de encontrar la forma geométrica del arco, es decir, las pendientes de cada segmento del arco, que llevan a una estructura libre de momentos flexionantes en todos sus vértices. Se establecen las ecuaciones que dan la solución, y se hace ver que dichas ecuaciones resultan ser trascendentes, por lo que se hace necesario implementar un método numérico de solución.

En la tercera sección abordamos el caso continuo. Se introducen los conceptos físicos y matemáticos para el análisis y se obtienen, en forma general, expresiones analíticas para las fuerzas y momentos, o torcas, que actúan en cada elemento del arco. Este análisis se lleva a cabo para dos tipos de distribución de carga: distribución uniforme en el eje horizontal y distribución uniforme a lo largo del eje del arco.

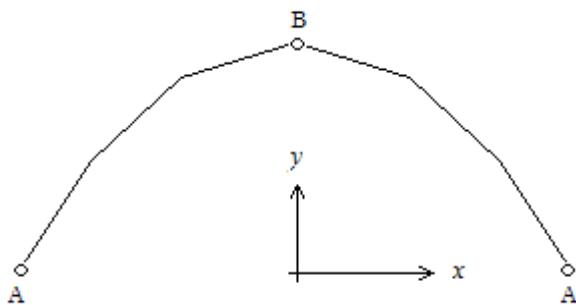
Los resultados se aplican entonces a geometrías particulares del arco. Como en el caso discreto, planteamos entonces el problema de encontrar, para una distribución de carga dada, la geometría del arco que además del equilibrio estático, nos lleve a una estructura libre de momentos flexionantes y fuerzas cortantes a lo largo del arco. Finalmente, en la sección IV se presentan algunas conclusiones.

## **II. ANÁLISIS ESTÁTICO DE ARCOS POLIGONALES**

### **II A. Análisis general**

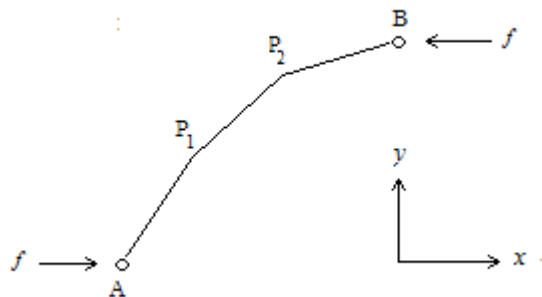
Consideremos el caso de arcos simétricos triarticulados formados por la concatenación de un cierto número de segmentos rectilíneos. Supongamos que la carga sobre el arco es debida a su peso propio. Esta suposición resulta más natural, que otro tipo de distribuciones de carga, para el análisis que haremos y además permite la comparación con posibles modelos hechos a pequeña escala.

Consideremos específicamente el caso de seis segmentos (tres en el semiarco). Utilizaremos un sistema de coordenadas  $xy$ , ver figura 1. Vemos que por las condiciones de simetría nos basta analizar el diagrama de un semiarco.



**FIGURA 1.** Arco simétrico poligonal de seis segmentos, articulado en su base, puntos A, y en su cúspide, punto B.

El semiarco, figura 2, se encuentra articulado en los puntos A y B. Por lo tanto, por simetría de ambas mitades del arco y tomando en cuenta la tercera ley de Newton, en el punto B no puede actuar ninguna fuerza vertical, ya que de ser así, en dicho punto (cúspide) esas fuerzas estarían actuando en sentidos opuestos en cada mitad, lo cual estaría en contra de la simetría supuesta para el arco. Por lo tanto en el punto B (figura 2) sólo actúa la fuerza horizontal  $f$  dirigida hacia la izquierda del eje  $x$ . Por condición de equilibrio sobre el eje horizontal, esta fuerza es precisamente el *cocéo*<sup>1</sup> que la estructura ejerce en el punto de apoyo A.



**FIGURA 2.** Semiarco con extremos A y B y vértices intermedios  $P_1$  y  $P_2$ . La fuerza horizontal  $f$  es la fuerza de cocéo.

Los puntos A y B quedan, por hipótesis, libres de momento flexionante; calcularemos entonces momentos y fuerzas que actúan en los puntos  $P_1$  y  $P_2$ .<sup>2</sup>

Supongamos que los segmentos rectos tienen longitudes  $r_1$ ,  $r_2$  y  $r_3$ , en el sentido que va de A a B, y todos ellos, un peso por unidad de longitud  $\lambda$ .

Asignando signo positivo a los momentos individuales que tienden a flexionar al arco en contra de su curvatura, examinaremos por separado el diagrama de fuerzas para

<sup>1</sup> El término *cocéo* se utiliza para designar la fuerza horizontal que ejerce un arco en cada uno de sus apoyos. El término se deriva de la palabra *coz*.

<sup>2</sup> Los momentos y fuerzas que actúan a lo largo de los segmentos rectos, fuera de los vértices, se calcularían si fuera necesario, en forma sencilla, considerándolos como vigas rectas. Este cálculo, que no incluiremos aquí, nos da valores pequeños si los segmentos son relativamente cortos.

cada uno de los tres segmentos. De la figura 3a tenemos, para el momento respecto a  $P_2$ <sup>3</sup>

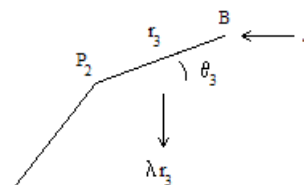
$$M_2 = r_3 [f_u \text{sen} \theta_3 - \lambda (r_3 / 2) \cos \theta_3] \quad (1)$$

De la figura 3b tenemos para el momento respecto a  $P_1$

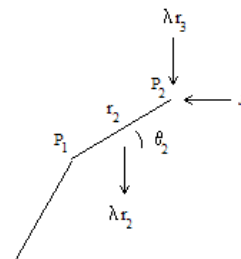
$$M_1 = r_2 [f \text{sen} \theta_2 - \lambda ((r_2 / 2) + r_3) \cos \theta_2], \quad (2)$$

y de la figura 3c tenemos que, como ya se dijo, el momento respecto a A debe anularse por ser este un punto articulado, lo que nos permite despejar  $f$  mediante la relación

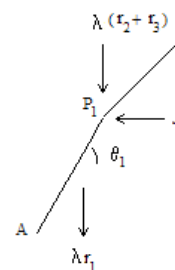
$$f = \lambda [(r_1 / 2) + r_2 + r_3] \cot \theta \quad (3)$$



**FIGURA 3a.** Los dos segmentos superiores del semiarco. En la gráfica aparecen las fuerzas que actúan sobre el segmento  $r_3$  y que ejercen momento respecto al punto  $P_2$ . Notar que  $\lambda r_3$  es el peso del segmento y por tanto actúa sobre su punto medio, o sea su centroide.



**FIGURA 3b.** Los dos segmentos inferiores del semiarco. En la gráfica aparecen las fuerzas que actúan sobre el segmento  $r_2$  que ejercen momento respecto al punto  $P_1$ .



**FIGURA 3c.** Segmento inferior del semiarco. En la gráfica aparecen las fuerzas que actúan sobre el segmento  $r_1$  que ejercen momento o torca respecto al punto A. El momento neto se anula.

<sup>3</sup> Si este momento flexionante lo calculamos respecto a otro punto, como puede ser el punto B, el resultado es el mismo. Esta propiedad del momento se cumple siempre y cuando el segmento en cuestión esté en equilibrio de fuerzas.

$$e_{t_2} = \cos\theta_2 \mathbf{i} + \text{sen}\theta_2 \mathbf{j}. \quad (5b)$$

Mientras que en el mismo  $P_1$  los vectores unitarios en direcciones normal y tangencial al eje del segmento 1 son

$$e_{n_1} = -\text{sen}\theta_1 \mathbf{i} + \cos\theta_1 \mathbf{j}, \quad (6a)$$

$$e_{t_1} = \cos\theta_1 \mathbf{i} + \text{sen}\theta_1 \mathbf{j}. \quad (6b)$$

Por tanto, las fuerzas cortante y tangencial que actúan sobre el segmento 2 en su extremo  $P_1$ , son

$$f_{c_2}^{(R)} = q_1 \cdot e_{n_2} = -f \text{sen}\theta_2 + \lambda(r_2 + r_3) \cos\theta_2, \quad (7)$$

$$f_{t_2}^{(R)} = q_1 \cdot e_{t_2} = -f \cos\theta_2 + \lambda(r_2 + r_3) \text{sen}\theta_2, \quad (8)$$

y las fuerzas cortante y tangencial que actúan sobre el segmento 1 en su extremo  $P_1$ , son

$$f_{c_1}^{(R)} = -q_1 \cdot e_{n_1} = f \text{sen}\theta_1 - \lambda(r_2 + r_3) \cos\theta_1, \quad (9)$$

$$f_{t_1}^{(R)} = -q_1 \cdot e_{t_1} = f \cos\theta_1 + \lambda(r_2 + r_3) \text{sen}\theta_1. \quad (10)$$

Aquí hacemos notar que sobre el segmento 1 en el punto  $P_1$ , por tercera ley de Newton, actúa la fuerza  $-q_1$ .

En forma análoga, consideramos ahora el punto  $P_2$  en la figura 4b. La fuerza  $q_2$  tiene el valor

$$q_2 = f \mathbf{i} + \lambda r_3 \mathbf{j}. \quad (11)$$

En este punto,  $P_2$ , los vectores unitarios en direcciones normal y tangencial al eje del segmento 3 son (ver figura 4b)

$$e_{n_3} = -\text{sen}\theta_3 \mathbf{i} + \cos\theta_3 \mathbf{j}, \quad (12a)$$

$$e_{t_3} = \cos\theta_3 \mathbf{i} + \text{sen}\theta_3 \mathbf{j}. \quad (12b)$$

Por lo tanto, las fuerzas cortante y tangencial que actúan sobre el segmento 3 en su extremo  $P_2$  son

$$f_{c_3}^{(P_2)} = q_2 \cdot e_{n_3} = -f \text{sen}\theta_3 + \lambda r_3 \cos\theta_3, \quad (13)$$

$$f_{t_3}^{(P_2)} = q_2 \cdot e_{t_3} = f \cos\theta_3 + \lambda r_3 \text{sen}\theta_3, \quad (14)$$

y las fuerzas cortante y tangencial que actúan sobre el segmento 2 en su extremo  $P_2$  son

$$f_{c_2}^{(P_2)} = -q_2 \cdot e_{n_2} = f \text{sen}\theta_2 - \lambda r_3 \cos\theta_2, \quad (15)$$

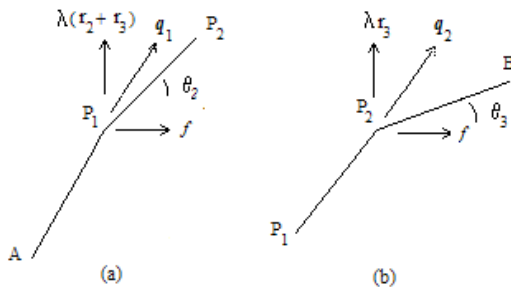
$$f_{t_2}^{(P_2)} = -q_2 \cdot e_{t_2} = f \cos\theta_2 + \lambda r_3 \text{sen}\theta_2. \quad (16)$$

En las ecuaciones (1) a (3), (7) a (10) y (13) a (16) tenemos las fórmulas generales que nos proporcionan los momentos

Ahora bien, a lo largo del arco podemos considerar dos direcciones perpendiculares entre sí, la normal y la tangencial al arco en cada punto. Esto tiene un sentido muy físico ya que al considerar las componentes de la fuerza en cada punto del arco, a lo largo de estos ejes, se tienen dos tipos de fuerza sobre el arco con efectos claramente diferentes. Por un lado, la fuerza cortante en la dirección normal, que actúa como esfuerzo cortante del arco, y por otro, la fuerza tangencial o también llamada axial, que es una fuerza de compresión del arco en cada punto a lo largo de la estructura. En el caso de arcos hechos a base de bloques de piedra, es evidente que la estructura puede resistir grandes fuerzas axiales y no así esfuerzos cortantes considerables. En cambio un arco formado con una viga de acero podrá resistir ambos tipos de esfuerzos, tanto cortantes como axiales. De este modo, el objetivo ahora es expresar la fuerza neta que actúa en cada uno de los vértices del arco poligonal, en sus componentes normal y tangencial, es decir, queremos calcular las fuerzas cortante y tangencial en cada uno de los vértices.

Respecto a las fuerzas cortantes, así como las tangenciales en los puntos  $P_1$  y  $P_2$ , en el análisis de fuerzas nos encontramos aquí con la característica de que en cada uno de estos vértices tenemos dos direcciones normales y dos tangenciales, debido a que hay una discontinuidad en la derivada de la curva del arco.

En la figura 4a tenemos la fuerza  $q_1$  que en el vértice  $P_1$  actúa con iguales magnitudes, pero en sentidos opuestos (tercera ley de Newton), sobre el segmento superior y el inferior. De esta fuerza queremos encontrar las componentes normal y tangencial, respecto a las diferentes direcciones que tienen los segmentos contiguos.



**FIGURA 4.** En (a) tenemos el diagrama de fuerzas aplicadas al segmento 2, sobre  $P_1$ , y en (b) tenemos el diagrama de fuerzas aplicadas al segmento 3, sobre  $P_2$ .

La fuerza  $q_1$  tiene el valor

$$q_1 = f \mathbf{i} + \lambda(r_2 + r_3) \mathbf{j}. \quad (4)$$

Estamos haciendo uso de los vectores unitarios  $\mathbf{i}$  y  $\mathbf{j}$  en las direcciones  $x$  y  $y$ , respectivamente.

En el punto  $P_1$  los vectores unitarios en direcciones normal y tangencial al eje del segmento 2 son

$$e_{n_2} = -\text{sen}\theta_2 \mathbf{i} + \cos\theta_2 \mathbf{j}, \quad (5a)$$

flexionantes, fuerzas tangenciales, cortantes y de coceo en el arco poligonal simétrico sometido a su peso propio, todo esto en términos de los valores de los parámetros que son la densidad lineal de los segmentos, sus longitudes y los ángulos que forman cada uno con la horizontal. A continuación consideramos las condiciones de equilibrio del arco poligonal. Es decir, queremos determinar si existe una geometría de nuestro arco poligonal para la cual, además del equilibrio de fuerzas ya considerado aquí, el momento flexionante en los vértices intermedios,  $P_1$  y  $P_2$  se anule.

## II B. Arco poligonal en equilibrio

La condición de equilibrio que buscamos significa físicamente el encontrar una geometría en la que en el arco considerado aquí de siete vértices, aun cuando todos ellos estuvieran articulados, tendría una estructura que se mantendría en pie, al estar sometida exclusivamente a su propio peso.

Supongamos que queremos diseñar un arco poligonal simétrico de seis segmentos idénticos de longitud  $r$ . (Si los segmentos se consideran con longitudes diferentes, por parejas, las expresiones serían un poco menos compactas y los resultados no serían mucho más ilustrativos).

Supongamos además que los segmentos tienen todos una densidad lineal  $\lambda$  y que el claro y la flecha (ancho y altura) del semiarco son valores dados,  $a$  y  $b$ , respectivamente. Nos planteamos el problema de encontrar los parámetros geométricos del arco, para los cuales se anule el momento flexionante en los vértices intermedios  $P_1$  y  $P_2$ . Es decir, para las condiciones señaladas, necesitamos determinar el valor de cuatro parámetros: la longitud  $r$  y los ángulos de elevación de los tres segmentos,  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  y  $\theta_3$ . O bien, si  $r$  es dato entonces la flecha queda por determinarse. Para esto tomamos las ecuaciones (1) a (3); haciendo cero los momentos  $M_1$  y  $M_2$  obtenemos las tres igualdades

$$f = (1/2)\lambda r \cot \theta_3, \quad (17)$$

$$f = (3/2)\lambda r \cot \theta_2, \quad (18)$$

$$f = (5/2)\lambda r \cot \theta_1, \quad (19)$$

(ésta última se obtiene de la ecuación (3)). De estas tres expresiones para  $f$  despejamos  $\tan \theta_2$  y  $\tan \theta_1$  en términos de  $\tan \theta_3$ , y obtenemos las siguientes relaciones entre las pendientes de los tres segmentos de cada semiarco:

$$\tan \theta_2 = 3 \tan \theta_3, \quad (20)$$

$$\tan \theta_1 = 5 \tan \theta_3. \quad (21)$$

Hacemos notar aquí la tendencia que nos da este resultado que relaciona las pendientes de los segmentos a medida que los tomamos de arriba hacia abajo. Está claro que si

hubiéramos considerado cuatro segmentos, en lugar de tres, en cada semiarco, la pendiente del cuarto arco hacia abajo sería 7 veces el valor de la pendiente del primero, y así sucesivamente para un número aún mayor de segmentos. Esta relación es una condición de equilibrio del arco.

Agregamos a éstas, dos relaciones que vienen de las características geométricas del arco ya establecidas:

$$a = r(\cos \theta_1 + \cos \theta_2 + \cos \theta_3), \quad (22)$$

$$b = r(\sin \theta_1 + \sin \theta_2 + \sin \theta_3). \quad (23)$$

Obtenemos así en las ecuaciones (20) a (23), cuatro ecuaciones trascendentes en las incógnitas  $r$ ,  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  y  $\theta_3$ . La solución de este sistema sólo puede obtenerse en forma numérica ya que se trata de ecuaciones trascendentes. Esta solución puede obtenerse en forma sencilla en un programa de computadora. La idea es partir de un cierto valor para uno de los ángulos, digamos  $\theta_3$ , que puede ser cero, y entonces ir incrementando en una magnitud muy pequeña dicho valor hasta que las igualdades (20) a (23) se cumplan. Para esta estructura en equilibrio, podemos calcular las fuerzas cortantes que actúan en ambos extremos de cada segmento rectilíneo. Por otro lado, combinando las ecuaciones (9) con (19), (7) con (18), (13) con (17) y (15) con (18) obtenemos un resultado interesante que se resume en esta forma: “la fuerza cortante es la misma en ambos extremos de cada segmento” y tiene el valor

$$f_{c(i)} = (\lambda r_i/2) \cos \theta_i, \quad (24)$$

donde  $i$  es un índice que, en este caso, va de 1 a 3 y representa a cada uno de los tres segmentos. Con la salvedad de que en el extremo superior del segmento 3 (la parte más alta del arco) no hay fuerza cortante. Es interesante notar que bajo esta situación de equilibrio, en lo que respecta a la fuerza cortante, cada uno de los extremos de cada segmento trabaja como lo hace una viga recta horizontal, con apoyos verticales en sus extremos.

Consideremos los siguientes ejemplos numéricos. Supongamos que disponemos de 6 barras rectas cada una con una longitud  $r = 1.5$  m. y una densidad lineal de masa de  $\lambda = 1$  kg/m. Supongamos que las barras se unen por medio de bisagras formando una cadena, y que en cada extremo de la cadena también hay una bisagra la cual se fijará a una superficie horizontal, como se muestra en la figura 1. Ahora bien, queremos colocar los extremos del arco a dos distancias diferentes uno del otro: en un caso a 8 m y en otro a 6 m. Al colocar esta cadena formando un arco simétrico queremos saber cuál es la posición de equilibrio en la que el arco puede permanecer. Esta geometría queda determinada por los tres ángulos  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  y  $\theta_3$  y la flecha o altura  $b$  del arco. Notar que  $a$  es la mitad del claro y es en este caso un dato del problema.

Resolviendo numéricamente las ecuaciones (20)-(23) por medio de un programa de computadora, y evaluando las expresiones (17) y (24) obtenemos lo siguiente:

**TABLA I.** Para un valor de  $r = 1.5$  m. Se escogen dos valores arbitrarios para el claro: 3 y 4 m, y un peso por unidad de longitud de  $1$  kg/m. Para cada valor de  $a$  se determinan, mediante solución numérica, la altura  $b$ , los tres ángulos  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  y  $\theta_3$ , las fuerzas cortantes en los vértices  $A$ ,  $P_1$  y  $P_2$  y la fuerza de coceo  $f$ .

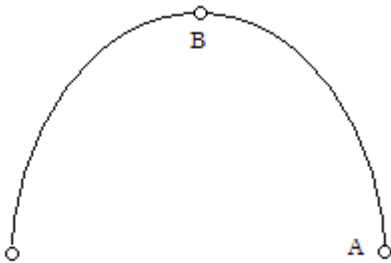
| $a(m)$ | $b(m)$ | $\theta_1(^{\circ})$ | $\theta_2(^{\circ})$ | $\theta_3(^{\circ})$ | $f_{c1}(kg)$ | $f_{c2}(kg)$ | $f_{c3}(kg)$ | $f$<br>(kg) |
|--------|--------|----------------------|----------------------|----------------------|--------------|--------------|--------------|-------------|
| 3      | 3.07   | 63.8                 | 58.7                 | 22.2                 | 0.33         | 0.47         | 0.69         | 1.84        |
| 4      | 1.83   | 38.8                 | 25.8                 | 9.1                  | 0.58         | 0.67         | 0.74         | 4.65        |

Observamos que al variar únicamente el claro ocurren cambios muy apreciables en los demás parámetros. Obviamente la flecha aumenta si el claro disminuye; en la última columna aparece la fuerza de coceo, la que el arco ejerce horizontalmente sobre su base de apoyo, se transmite a través del arco y por tanto es la misma que la fuerza horizontal que cada uno de los semiarcos ejerce sobre el otro. Si el claro es grande en relación a la flecha, la fuerza de coceo aumenta y viceversa. Un resultado menos obvio es la combinación de los ángulos que forman cada pareja de segmentos simétricos con la horizontal, así como las fuerzas cortantes que actúan en cada uno de los vértices.

Para una posterior comparación con el caso continuo, destacamos aquí que en este caso, al anular los momentos flexionantes, las fuerzas cortantes permanecen con valores distintos de cero y esto se debe a la discontinuidad en la curva del arco.

### III. ANÁLISIS ESTÁTICO DE ARCOS CONTINUOS TRIARTICULADOS

Consideremos ahora un arco continuo simétrico, en un plano vertical, como se muestra en la figura 5. Por condición de isostaticidad<sup>4</sup> suponemos que el arco está articulado en ambos puntos de su base y en el punto de altura máxima.

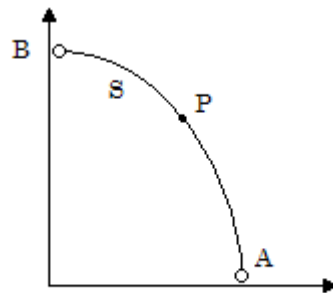


**FIGURA 5.** Arco continuo simétrico articulado en ambos puntos de su base y en su cúspide.

<sup>4</sup>Esta condición significa que los parámetros a determinar pueden ser calculados en principio, como resultado de un sistema de ecuaciones algebraicas.

Consideremos otra vez que  $xy$  es un plano de coordenadas cartesianas por medio del cual describiremos la forma geométrica del arco, de tal manera que el eje  $y$  es el eje de simetría del arco y  $A$  y  $B$  son las intersecciones de la curva con los ejes  $x$  y  $y$ , respectivamente.

Si suponemos de nuevo que el arco lo sometemos a cargas con una distribución simétrica respecto al eje vertical, entonces podemos hacer el análisis de fuerzas y momentos tomando solamente la mitad del arco, el que va del punto  $A$  al punto  $B$ , como se muestra en la figura 6. Por la misma condición de simetría en geometría y carga, y por tercera ley de Newton, observamos que la fuerza sobre el punto  $B$  del semiarco deberá estar dirigida horizontalmente, en el sentido positivo del eje  $x$ . Sea  $P(x, y)$  un punto cualquiera sobre el arco, cuya curva está dada por una función  $y(x)$  sin precisar por el momento.



**FIGURA 6.** Semiarco donde aparecen los puntos articulados  $A$  y  $B$ , así como un punto arbitrario  $P(x, y)$ .  $S$  es el segmento de arco que va de  $B$  a  $P$ .

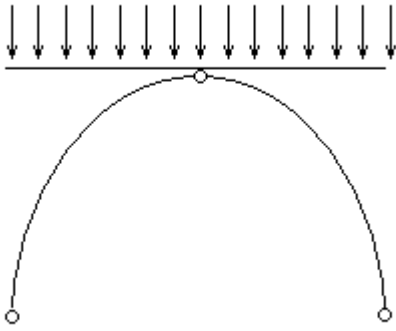
El objetivo del análisis es calcular el momento flexionante, la fuerza cortante y la fuerza tangencial (compresión) que actúan en el punto  $P$ , tomando en cuenta para ello el diagrama de fuerzas que están actuando sobre el segmento de arco  $S$  que va de  $B$  a  $P$ . Para esto necesitamos ahora incorporar al análisis la distribución de carga que queremos introducir.

Consideramos en este análisis dos tipos de distribución de carga: una distribución horizontal uniforme y una distribución uniforme a lo largo del eje del arco.

#### III A. Distribución horizontal uniforme de carga

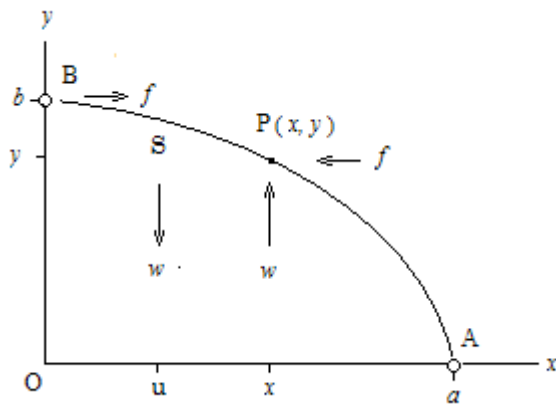
Suponemos que tenemos una carga por unidad de longitud  $\lambda$  a lo largo del eje  $x$ , la cual actúa sobre el arco, como se muestra en figura 7. Aquí hacemos notar que por propósitos didácticos, no vamos a considerar en forma simultánea dos distribuciones de carga diferentes. Al hacerlo, el análisis se hace un tanto más complicado y puede perderse algo de la claridad del procedimiento. También podríamos decir que en este primer caso estamos suponiendo una situación en la

que el peso del arco es muchísimo menor que la carga horizontalmente distribuida que soporta la estructura<sup>5</sup>.



**FIGURA 7.** El diagrama indica que en este caso la carga sobre el arco se encuentra distribuida uniformemente sobre el eje horizontal.

En este caso el diagrama de fuerzas aparece en la figura 8. Podemos considerar que son cuatro fuerzas las que están actuando sobre el segmento de arco  $S$ , que va de  $B$  a  $P$ .



**FIGURA 8.** Diagrama de fuerzas que actúan sobre el segmento de arco  $S$ .

Dos fuerzas horizontales de igual magnitud  $f$  y sentidos opuestos y dos verticales también de iguales magnitudes  $w$  y sentidos opuestos. Aquí se está considerando que se cumple la condición de equilibrio de fuerzas sobre el segmento. Es decir, tenemos, en forma vectorial:

$f$  es la fuerza horizontal aplicada por la otra mitad del arco sobre el punto  $B$ , (esta es la fuerza de coceo).

$-f$  es la fuerza horizontal sobre el punto  $P$ , ejercida por el segmento de arco que va de  $A$  a  $P$  (la que equilibra al segmento en el eje horizontal)

$w = -\lambda x \mathbf{j}$  es la carga del segmento  $S$ , es una fuerza vertical aplicada sobre un punto  $u$  del segmento,

$-w = \lambda x \mathbf{j}$  es la fuerza vertical aplicada sobre el punto  $P$ , (la que equilibra al segmento en el eje vertical)

<sup>5</sup> Un ejercicio interesante para el estudiante será precisamente seguir este análisis para los dos tipos de distribución de carga aquí estudiados, actuando simultáneamente.

$u$  es la posición horizontal promedio de la carga en el segmento. Por ser uniforme la distribución de carga,  $u = x/2$ .

Ahora calculamos el momento flexionante (torca) que ejercen cada una de estas fuerzas con respecto al punto  $P$ . De las fuerzas anteriores sólo dos de ellas producen momento respecto a dicho punto (las que no están aplicadas precisamente sobre  $P$ ): la fuerza  $f$  que actúa sobre  $B$ , cuyo brazo de palanca es  $b-y$  (distancia vertical de  $B$  a  $P$ ) y la carga vertical  $-\lambda x \mathbf{j}$  cuyo brazo de palanca es  $x-u$  (distancia horizontal de  $u$  al punto  $P$ ). Como estamos suponiendo una distribución horizontal uniforme el valor de  $u$  es simplemente  $u = x/2$ . Estas dos fuerzas producen momentos en sentidos opuestos; tomando como positivo el momento que tiende a rotar al segmento  $S$ , respecto a  $P$ , en contra de su curvatura, obtenemos para el momento neto sobre el segmento

$$M = f(b - y) - \lambda x(x - u). \quad (25)$$

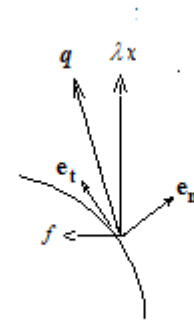
Ahora, considerando el semiarco entero que va de  $A$  a  $B$ , articulado en ambos puntos, sabemos que el momento flexionante respecto a cualquiera de estos puntos debe ser igual a cero. Expresando dicho equilibrio de momentos respecto al punto  $A$  obtenemos  $f b = \lambda a(a - X)$ , ya que  $\lambda a$  es la carga vertical sobre todo el semiarco y  $X$  representa la componente horizontal del centroide del semiarco, que por ser una distribución uniforme se obtiene  $X = a/2$ . Por tanto despejando  $f$  se tiene

$$f = \lambda a^2 / 2b. \quad (26)$$

Esta fuerza  $f$  que se transmite a través del arco, siempre en dirección horizontal, constituye, como en el caso discreto, la llamada fuerza de coceo que todo arco ejerce horizontalmente en sus bases. Sustituyendo la ecuación (26) en la ecuación (25) obtenemos:

$$M(x, y) = (\lambda / 2)[(a^2 / b)(b - y) - x^2]. \quad (27)$$

Para calcular las fuerzas cortante y tangencial<sup>6</sup> consideremos el siguiente diagrama, figura 9



**FIGURA 9.** Diagrama de fuerzas aplicadas sobre el punto  $P$ .

<sup>6</sup> La fuerza tangencial en cada punto del arco es llamada también fuerza axial.

**III A1. Arco semicircular**

Como ya dijimos, sobre el segmento  $S$  están actuando en el punto  $P$ , físicamente dos fuerzas: una vertical  $\lambda x$  hacia arriba y una horizontal  $f$  hacia la izquierda. Al vector resultante de estas dos fuerzas le llamamos  $q$  y lo podemos expresar en la forma

$$q = -f\mathbf{i} + \lambda x\mathbf{j}. \tag{28}$$

Ahora queremos expresar este vector  $q$  en sus dos componentes en direcciones normal y tangencial a la curva  $y(x)$  en el punto  $P$ . Sean  $e_n$  y  $e_t$  vectores unitarios en direcciones normal y tangencial respectivamente, a la curva  $y(x)$  en el punto  $P(x, y)$ ; podemos expresar estos vectores en la forma

$$e_n = k\mathbf{i} - h\mathbf{j}, \tag{29}$$

$$e_t = h\mathbf{i} + k\mathbf{j}, \tag{30}$$

donde  $h$  y  $k$  son cosenos directores, y por ser componentes de vectores unitarios se cumple la relación

$$h^2 + k^2 = 1. \tag{31}$$

La pendiente del vector  $e_t$  es precisamente la derivada de la función  $y(x)$  en el punto  $P$ , es decir

$$y'(x)_p = k/h. \tag{32}$$

De las expresiones (29) a (32) podemos escribir

$$h = \frac{-1}{\sqrt{1+y'^2(x)}}, \tag{33}$$

$$k = \frac{-y'(x)}{\sqrt{1+y'^2(x)}}. \tag{34}$$

Ahora expresamos las fuerzas cortante y tangencial, como los productos punto (productos escalares) de los vectores  $q$  y  $e_n$  y los vectores  $q$  y  $e_t$ , respectivamente. Por lo tanto,

$$f_c = \frac{\lambda[(a^2/2b)y'+x]}{\sqrt{1+y'^2}}, \tag{35}$$

$$f_t = \frac{\lambda[(a^2/2b)-xy']}{\sqrt{1+y'^2}}. \tag{36}$$

Las ecuaciones (26), (27), (35) y (36) son los momentos y fuerzas cortante y tangencial en cualquier punto de un arco simétrico de cualquier geometría, sometido a una distribución horizontal uniforme de carga. Estos momentos y fuerzas, en general son distintos de cero, y como se ha dicho, usualmente son contrarrestados por momentos y fuerzas de reacción producidos por la resistencia del material de la estructura.

Para ilustrar los resultados anteriores, tomemos a manera de ejemplo un arco circular, el cual nos permite una solución analítica, y cuya ecuación es

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}. \tag{37}$$

En este caso el parámetro  $b$  de las ecuaciones (26) y (27) es igual a  $a$  y la derivada de  $y(x)$  la expresamos como

$$y'(x) = -x/\sqrt{a^2 - x^2}, \tag{38}$$

y obtenemos así, de dichas fórmulas generales las expresiones para el arco circular, bajo la condición de carga mencionada

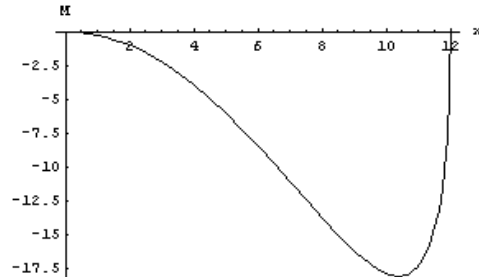
$$M(x) = (\lambda/2)[a(a - \sqrt{a^2 - x^2}) - x^2], \tag{39}$$

$$f_c(x) = \lambda x[\sqrt{1 - x^2/a^2} - 1/2], \tag{40}$$

$$f_t(x) = (\lambda/a)[(a/2)\sqrt{a^2 - x^2} + x^2]. \tag{41}$$

Y de la ecuación (26), con  $a = b$ , la fuerza de coceo es

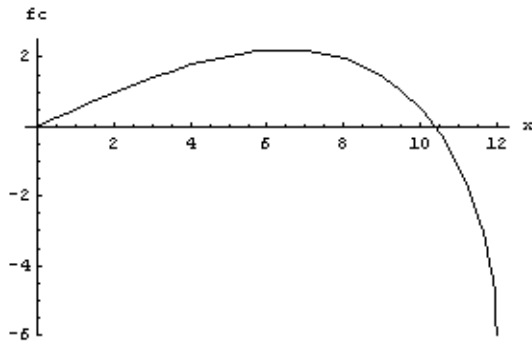
$$f = \lambda a/2. \tag{42}$$



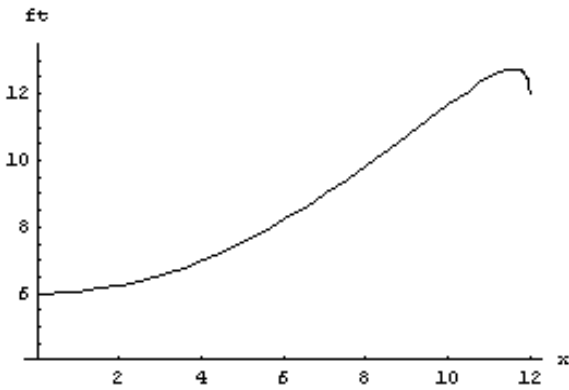
**FIGURA 10a.** Gráfica del momento flexionante, la función  $M(x)$ , para un arco semicircular,  $a=12$ m. y distribución horizontal uniforme de carga,  $\lambda = 1$  kg/m. La coordenada  $x$  va desde  $x=0$  (eje vertical) hasta  $x= a$ .

En la figura 10, observamos las gráficas de las tres funciones anteriores. Cada uno de estos tres parámetros tiene un comportamiento peculiar, como función de  $x$ . Las tres curvas muestran ya sea máximo o mínimo en algún punto en el intervalo. Este comportamiento se debe al tipo de distribución de carga (horizontal) y a la geometría circular elegida. Observamos que este arco estará sometido a un alto momento flexionante en puntos cercanos a la base de apoyo. La fuerza cortante parte de cero en la cúspide y tiene un máximo local, termina con una magnitud grande (valor negativo) también en la base de apoyo, y pasa por un valor de cero en un cierto punto del arco; mientras que la fuerza tangencial parte del valor fijo de la fuerza de coceo, en la cúspide y de ahí crece hasta un valor máximo situado

muy cerca de la base. Al ver estas gráficas resulta evidente que el arco semicircular no es una estructura cercana al equilibrio, para una distribución horizontal uniforme de carga.



**FIGURA 10b.** Gráfica de la fuerza cortante, la función  $f_c(x)$ , para un arco semicircular,  $a=12m$ . y distribución horizontal uniforme de carga,  $\lambda = 1 \text{ kg/m}$ . La coordenada  $x$  va desde  $x=0$  (eje vertical) hasta  $x=a$ .



**FIGURA 10c.** Gráfica de la fuerza tangencial, la función  $f_t(x)$ , para un arco semicircular,  $a=12m$ . y distribución horizontal uniforme de carga,  $\lambda = 1 \text{ kg/m}$ . La coordenada  $x$  va desde  $x=0$  (eje vertical) hasta  $x=a$ .

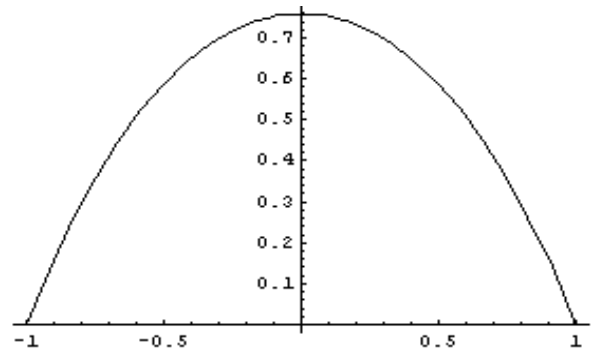
### III A2. Arco en equilibrio

Volviendo a las fórmulas (26), (27), (35) y (36) nos planteamos el problema de encontrar si existe una geometría del arco, o sea una función  $y(x)$  para la cual el momento flexionante se anule en todo punto del arco. Físicamente esta condición significa que el arco no tendería a flexionarse en ningún punto.

El problema se resuelve haciendo  $M = 0$  en la ecuación (27) y obtenemos una función que puede escribirse en la forma

$$y(x) = b[-(x^2/a^2) + 1]. \quad (43)$$

Es, como vemos, la ecuación de una parábola cuyo eje de simetría es el eje  $y$ , ver figura 11.



**FIGURA 11.** Bajo la condición de carga distribuida uniformemente sobre el eje horizontal del arco, la forma parabólica queda libre de momento flexionante, así como de fuerza cortante a lo largo de todo el arco.

Ahora bien, esta función  $y(x)$  además de hacer cero el momento flexionante en todo el arco, nos da algo más, ya que si ahora tomamos su derivada y sustituimos en la ecuación (35) para la fuerza cortante, obtenemos como resultado que para la misma curva  $y(x)$  también se anula dicha fuerza.

Esto significa que al hacer  $M = 0$  obtenemos una integral de la ecuación que resulta de hacer  $f_c = 0$ . Es decir, estamos obteniendo que para la geometría parabólica, ecuación (43), tanto  $M$  como  $f_c$  son cero para todo punto  $(x, y)$  del arco. En otras palabras, este resultado nos dice que para una distribución horizontal uniforme de carga, el arco parabólico simétrico es una estructura no solo en equilibrio de fuerzas, sino que se encuentra libre de momento flexionante y de fuerzas cortantes a lo largo del arco. Solamente la fuerza tangencial (o axial) es diferente de cero y se expresa por la ecuación

$$f_t = \frac{\lambda[(a^4/2b) + 2bx^2]}{\sqrt{a^4 + 4b^2x^2}}, \quad (44)$$

que es la fuerza de compresión, como función de la coordenada horizontal, a la que queda sometido el arco bajo estas condiciones. Como caso particular, si evaluamos esta expresión en  $x = 0$ , se obtiene la fuerza de compresión en la cúspide del arco, que es precisamente la fuerza de coceo dada por la ecuación (26).

### III B. Distribución uniforme de carga sobre el eje del arco

Consideremos ahora el caso en el que la carga que soporta el arco se debe solamente a su propio peso. Suponiendo que tenemos una sección y una distribución de masa uniformes, entonces tenemos una carga, es decir el peso por unidad de longitud  $\lambda$ . Ver figura 12.

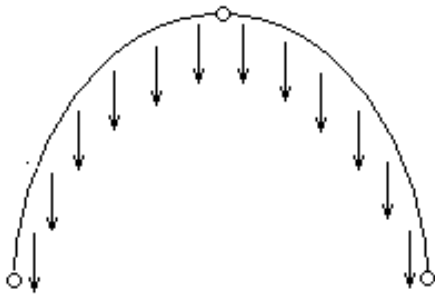


FIGURA 12. El diagrama indica una distribución uniforme de carga a lo largo del arco

Observamos en la figura 13 que el diagrama de fuerzas es muy similar al de la figura 8; sin embargo, algunas de las fuerzas muestran diferencias importantes.

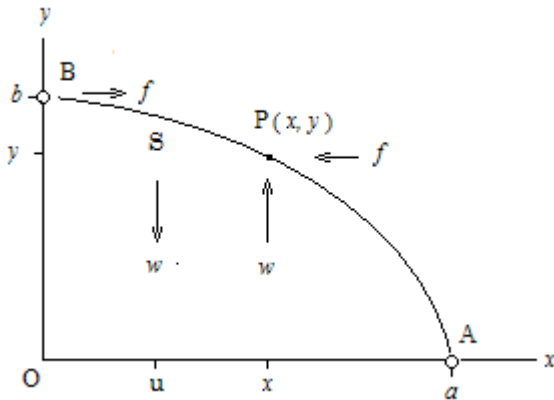


FIGURA 13. Diagrama de fuerzas que actúan sobre el segmento de arco S.

En este caso tenemos también, como en el anterior, dos fuerzas horizontales de igual magnitud  $f$  y sentidos opuestos y dos verticales también de iguales magnitudes  $w$  y sentidos opuestos. Aquí se cumple también la condición de equilibrio de fuerzas sobre el segmento. Pero a diferencia del caso anterior, ahora la carga sobre el segmento  $S$  es su propio peso y es igual a  $\lambda S$ . Al cambiar el sistema de fuerzas, cambiarán también las ecuaciones para el equilibrio. Es decir, tenemos, en forma vectorial:

$f$  es la fuerza horizontal aplicada sobre el punto  $B$ , (fuerza de coceo),

$-f$  es la fuerza horizontal sobre el punto  $P$  (la que equilibra al segmento en el eje horizontal),

$w = -\lambda S j$  es el peso del segmento  $S$ , y es una fuerza vertical aplicada sobre un punto  $x = u$ ,

$-w = \lambda S j$  es la fuerza vertical aplicada sobre el punto  $P$ , (la que equilibra al segmento en el eje vertical),

$u$  es la componente horizontal del centroide del segmento  $S$  (es decir de la posición promedio de la carga en el segmento).

$X$  es la componente horizontal del centroide del semiarco completo (este punto no se muestra en la figura).

Ahora calculamos el momento flexionante (torca) que ejercen estas fuerzas con respecto al punto  $P$ . Como vimos en la sección anterior, de estas fuerzas sólo dos de ellas producen momento respecto a dicho punto: la fuerza  $f$  que actúa sobre  $B$ , cuyo brazo de palanca es  $b-y$  y la carga vertical  $\lambda S j$  cuyo brazo de palanca es  $x-u$ . Observemos que en este caso  $u$  es la componente horizontal del centroide del arco  $S$ , y como veremos es necesario hacer una integral para determinar su valor. Las dos fuerzas que actúan sobre  $P$  producen momentos en sentidos opuestos; tomando como positivo el momento que tiende a rotar al segmento  $S$ , respecto a  $P$ , en contra de su curvatura, obtenemos para el momento neto sobre el segmento

$$M = f(b - y) - \lambda S(x - u). \tag{45}$$

Ahora en este caso, tanto las longitudes de arco como los centroides del arco  $S$  y del semiarco completo, deben expresarse en términos de integrales de línea sobre el arco, que a su vez pueden escribirse como integrales sobre la variable  $x$ . Si llamamos  $L$  a la longitud de todo el semiarco,

que va de  $A$  a  $B$ , entonces  $L = \int_0^a ds$ , donde la diferencial de arco es:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'^2} dx. \tag{46}$$

Por lo tanto, tenemos

$$L = \int_0^a \sqrt{1 + y'^2} dx. \tag{47}$$

Por definición de centroide, escribimos para el producto  $LX$

$$LX = \int_0^a x \sqrt{1 + y'^2} dx. \tag{48}$$

En forma similar expresamos la longitud  $S$  del segmento, así como el producto  $Su$  en la forma

$$S = \int_0^x \sqrt{1 + y'^2} dx, \tag{49}$$

$$Su = \int_0^x x \sqrt{1 + y'^2} dx. \tag{50}$$

Como el semiarco entero lo suponemos articulado en sus dos extremos  $A$  y  $B$ , el momento flexionante sobre él debe anularse, lo que se expresa por la ecuación

$$f_b = \lambda L(a - X). \tag{51}$$

Sustituyendo las ecuaciones (48) - (51) en la ecuación (45) obtenemos

$$M = \lambda \left[ \left( a \int_0^x \phi(x) dx - \int_0^a x \phi(x) dx \right) (1 - y/b) - x \int_0^x \phi(x) dx + \int_0^x x \phi(x) dx \right], \quad (52)$$

donde, por comodidad estamos definiendo

$$\phi(x) = \sqrt{1 + y'^2(x)}. \quad (53)$$

Para calcular las fuerzas cortante y tangencial hacemos el mismo análisis vectorial de la sección (III A), con la diferencia de que para la carga vertical, en lugar de la fuerza  $\lambda x$  (distribución horizontal), ahora tenemos la fuerza  $\lambda S$  (distribución sobre el eje). Con lo cual el vector  $\mathbf{q}$  definido como la resultante de las fuerzas horizontal y vertical que actúan sobre  $P$ , es ahora

$$\mathbf{q} = -f\mathbf{i} + \lambda x\mathbf{j}. \quad (54)$$

Ahora queremos expresar este vector  $\mathbf{q}$  en sus dos componentes en direcciones normal y tangencial a la curva  $y(x)$  en el punto  $P$ . Si, como en la sección anterior,  $\mathbf{e}_n$  y  $\mathbf{e}_t$  vectores unitarios en direcciones normal y tangencial respectivamente, a la curva  $y(x)$  en el punto  $P(x, y)$ , podemos expresar estos vectores en la forma

$$\mathbf{e}_n = -[\mathbf{i}y'(x) - \mathbf{j}] / \phi(x), \quad (55)$$

$$\mathbf{e}_t = -[\mathbf{i} + y'(x)\mathbf{j}] / \phi(x). \quad (56)$$

Ahora expresamos las fuerzas cortante y tangencial como los productos punto de los vectores  $\mathbf{q}$  y  $\mathbf{e}_n$  y los vectores  $\mathbf{q}$  y  $\mathbf{e}_t$  respectivamente, por lo tanto

$$f_c = [f y'(x) + \lambda S] / \phi(x), \quad (57)$$

$$f_t = [f - \lambda S y'(x)] / \phi(x). \quad (58)$$

Las expresiones (51), (52), (57) y (58) son las fórmulas generales para el momento flexionante, así como fuerzas de coceo, cortante y tangencial (axial), para un arco simétrico de cualquier geometría, sometido a una distribución de carga uniforme a lo largo de su eje, o sea a su propio peso. Estos momentos y fuerzas en general son distintos de cero, para geometrías arbitrarias y deberán ser contrarrestados por momentos y fuerzas reactivas producidos por la resistencia de la estructura.

### III B1. Arco semicircular

Para ilustrar estos resultados, a manera de ejemplos, vamos a considerar dos geometrías con la simetría vertical requerida, y que nos llevan a resultados analíticos. Estas geometrías son el semicírculo y la parábola y como

veremos, ninguna de estas dos es la geometría de equilibrio para esta distribución de carga.

En primer lugar consideremos el arco semicircular. Para esta forma de arco partimos de la función

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}, \quad (59)$$

con lo cual la función  $\phi$  definida en la ecuación (53) queda

$$\phi(x) = a / y = a / \sqrt{a^2 - x^2}. \quad (60)$$

Con esta función las cuatro integrales de la ecuación (52) se evalúan directamente con auxilio de las tablas y se obtiene (recordando que aquí  $b = a$ )

$$\int_0^a \phi(x) dx = \pi a / 2, \quad (61)$$

$$\int_0^a x \phi(x) dx = a^2, \quad (62)$$

$$\int_0^x \phi(x) dx = a \arctan[x / \sqrt{a^2 - x^2}] = a\theta, \quad (63)$$

$$\int_0^x x \phi(x) dx = a[a - \sqrt{a^2 - x^2}]. \quad (64)$$

En la ecuación (63)  $\theta$  es el ángulo que forma el vector de posición del punto  $P$  del arco con el eje vertical (ángulo polar). Sustituimos estas integrales en las ecuaciones (51) y (52) y tenemos:

$$f = \lambda a[(\pi / 2) - 1], \quad (65)$$

$$M(x) = \lambda a \left[ (\pi / 2)(a - \sqrt{a^2 - x^2}) - x \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right) \right]. \quad (66)$$

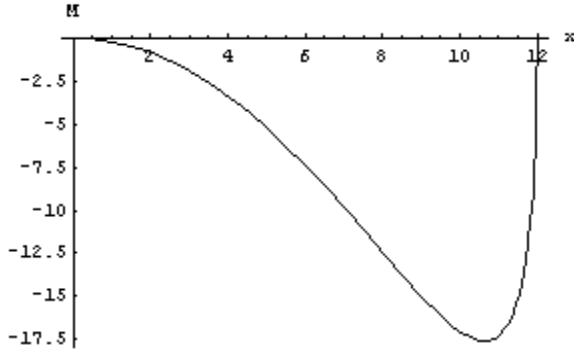
y de las ecuaciones (57), (58) y (65) obtenemos

$$f_c = \lambda \left[ (1 - \pi / 2)x + \sqrt{a^2 - x^2} \arctan(x / \sqrt{a^2 - x^2}) \right], \quad (67)$$

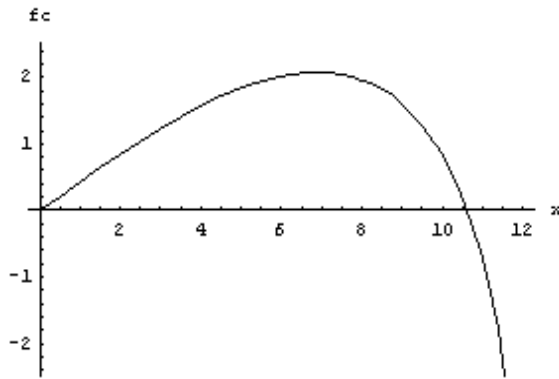
$$f_t = \lambda \left[ -(1 - \pi / 2)\sqrt{a^2 - x^2} + x \arctan(x / \sqrt{a^2 - x^2}) \right]. \quad (68)$$

En las figuras 14 observamos las gráficas de las funciones anteriores. Observamos en las tres funciones un comportamiento cualitativo muy similar, al caso de la distribución horizontal de carga, con una geometría semicircular. Ahora la fuerza tangencial aparece en forma monótonamente creciente y con valores más altos que en el caso anterior. Es fácil concluir de estas gráficas, que el arco

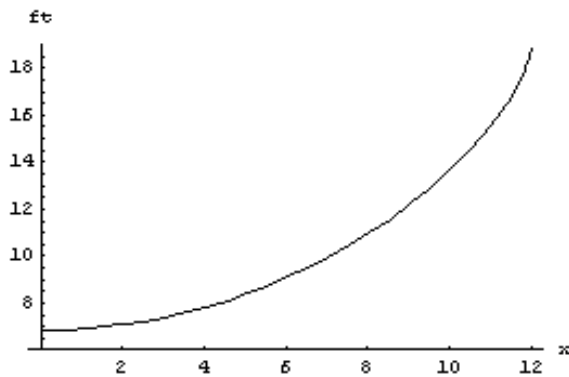
semicircular no es una estructura en equilibrio para una distribución de carga sobre el eje del arco.



**FIGURA 14a.** Gráfica del momento flexionante, la función  $M(x)$ , para un arco semicircular, con  $a = 12\text{m}$  y una distribución uniforme de carga sobre el arco,  $\lambda = 1\text{kg/m}$ . La coordenada  $x$  va desde  $x = 0$  (eje vertical) hasta  $x = a$



**FIGURA 14b.** Gráfica de la fuerza cortante, la función  $f_c(x)$ , para un arco semicircular, con  $a = 12\text{m}$  y una distribución uniforme de carga sobre el arco,  $\lambda = 1\text{kg/m}$ . La coordenada  $x$  va desde  $x = 0$  (eje vertical) hasta  $x = a$ .



**FIGURA 14c.** Gráfica de la fuerza tangencial, la función  $f_t(x)$ , para un arco semicircular, con  $a = 12\text{m}$  y una distribución uniforme de carga sobre el arco,  $\lambda = 1\text{kg/m}$ . La coordenada  $x$  va desde  $x = 0$  (eje vertical) hasta  $x = a$ .

**III B2.- Arco parabólico**

Continuando con el caso de carga distribuida a lo largo del arco, como segundo ejemplo consideremos ahora un arco parabólico cuya ecuación la escribimos en la forma

$$y(x) = b(1 - x^2 / a^2) \tag{69}$$

Con esta función tenemos otra vez que la altura del arco es  $b$  y el semiancho es  $a$ . La derivada de la función es  $y'(x) = -2bx / a^2$  y la función  $\phi$  en la ecuación (53) es en este caso

$$\phi(x) = \sqrt{1 + (4b^2 / a^4)x^2} \tag{70}$$

Necesitamos ahora evaluar las cuatro integrales de la ecuación (52). Para esto utilizamos dos fórmulas de integrales definidas que son las siguientes

$$\int \phi(x)dx = (x/2)\phi(x) + (a^2 / 4b)\text{arcsenh}(2b/a^2), \tag{71}$$

$$\int x\phi(x)dx = \left(\frac{a^4}{12b^2}\right)\phi(x)^3 \tag{72}$$

Estamos usando en la ecuación (71) la función inversa de  $\text{senhz} = \frac{1}{2}[e^z - e^{-z}]$ . Sustituyendo esto en la ecuación (52) se obtiene

$$L = \int_0^a \phi(x)dx = (a/2)\phi(a) + (a^2 / 4b)\text{arcsenh}(2b/a), \tag{73}$$

$$LX = \int_0^a x\phi(x)dx = (a^4 / 12b^2)[\phi^3(a) - 1], \tag{74}$$

$$S = \int_0^x \phi(x)dx = (x/2)\phi(x) + (a^2 / 4b)\text{arcsenh}[(2b/a^2)x], \tag{75}$$

$$Su = \int_0^x x\phi(x)dx = (a^4 / 12b^2)[\phi^3(x) - 1]. \tag{76}$$

Finalmente sustituimos estas expresiones, (70) y (73) a (76), con  $y'(x) = -2bx / a^2$  en las expresiones (51), (52), (57) y (58):

$$M(x) = (b/a^2)fx^2 + [(x^2/2)\phi(x) + x(a^2/4b)\text{arcsenh}[(2b/a^2)x] - (a^4/12b^2)[\phi^3(x) - 1]], \tag{77}$$

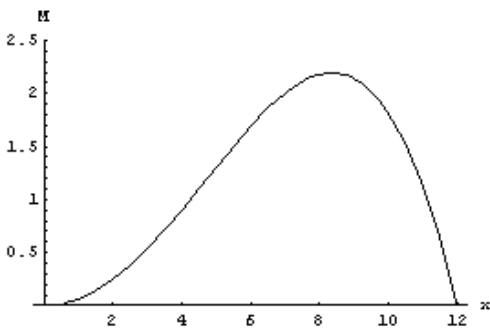
$$f_c(x) = \frac{1}{\phi(x)} \left[ -(2b/a^2)fx + \lambda[(x/2)\phi(x) + (a^2/4b)\text{arcsenh}[(2b/a^2)x]] \right], \tag{78}$$

$$f_t(x) = \frac{1}{\phi(x)} \left[ f + \lambda(2b/a^2)x[(x/2)\phi(x) + (a^2/4b)\text{arcsenh}[(2b/a^2)x]] \right], \tag{79}$$

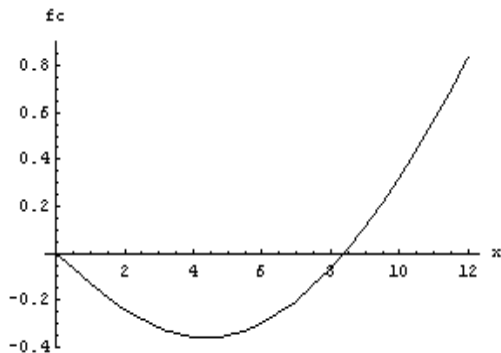
donde la fuerza de coceo  $f$  tiene el valor

$$f = \lambda(a^2/2b)[\phi(a) + (a/2b)\operatorname{arcsenh}(2b/a) - (a^2/6b^2)[\phi^3(a) - 1]] \quad (80)$$

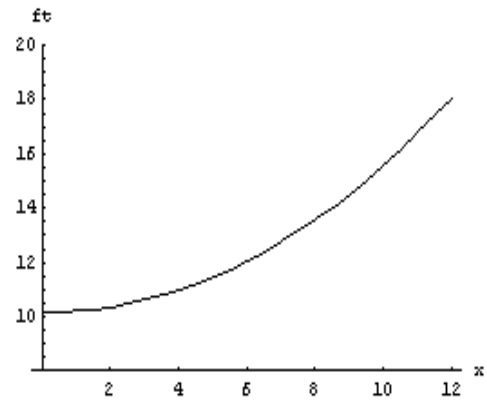
En las figuras 15 observamos las gráficas de las tres funciones anteriores. El momento flexionante así como la fuerza cortante exhiben un máximo y un mínimo respectivamente, y un comportamiento muy diferente al del caso del arco semicircular, en cuanto al sentido de ambos parámetros. Recordemos, de acuerdo con nuestra definición, que un momento flexionante positivo significa que el arco, dejado en libertad, tiende a flexionarse en sentido contrario a su curvatura. Notamos que, como también ocurre en los casos anteriores, la fuerza cortante se hace cero sólo en un punto preciso del arco. El arco parabólico, al igual que el semicircular, no son estructuras de equilibrio para una distribución uniforme de carga sobre el eje.



**FIGURA 15a.** Gráfica del momento flexionante, la función  $M(x)$ , para un arco parabólico, con  $a = 12\text{m}$  y una distribución uniforme de carga sobre el arco,  $\lambda = 1 \text{ kg/m}$ . La coordenada  $x$  va desde  $x = 0$  (eje vertical) hasta  $x = a$ .



**FIGURA 15b.** Gráfica de la fuerza cortante, la función  $f_c(x)$ , para un arco parabólico, con  $a = 12\text{m}$  y una distribución uniforme de carga sobre el arco,  $\lambda = 1 \text{ kg/m}$ . La coordenada  $x$  va desde  $x = 0$  (eje vertical) hasta  $x = a$ .



**FIGURA 15c.** Gráfica de la fuerza tangencial, la función  $f_t(x)$ , para un arco parabólico, con  $a = 12\text{m}$  y una distribución uniforme de carga sobre el arco,  $\lambda = 1 \text{ kg/m}$ . La coordenada  $x$  va desde  $x = 0$  (eje vertical) hasta  $x = a$ .

### III B3. Arco en equilibrio

Partimos ahora de los resultados obtenidos para la distribución uniforme de carga a lo largo del eje del arco, válidos para una geometría arbitraria. Estos resultados quedan expresados por las ecuaciones (51), (52) y (57).

Como en el caso de la distribución horizontal de carga, formulamos ahora el siguiente problema:

Encontrar si para una distribución uniforme sobre el eje del arco existe una cierta geometría para la cual el arco quede libre de momento flexionante y/o fuerza cortante en todos sus puntos.

Igualando a cero la ecuación para  $M(x, y)$ , dada por la ecuación (52), podemos escribir la relación

$$(f/\lambda)(b-y) = x \int_0^x \phi(x) dx - \int_0^x x \phi(x) dx \quad (81)$$

Vemos que aquí intervienen la variable  $x$ , la función  $y(x)$ , así como dos integrales en la variable  $x$ . Del lado izquierdo tenemos el factor  $f/\lambda$  que no depende de  $x$  (recordemos que la fuerza de coceo tiene el mismo valor en todo punto del arco). Con el objeto de tener una relación entre  $y$  y  $x$  derivamos la expresión anterior y se obtiene

$$(-f/\lambda)y'(x) = x \int_0^x \phi(x) dx, \quad (82)$$

la cual volvemos a derivar para eliminar la integral y obtenemos así una ecuación diferencial de segundo orden para la función  $y(x)$ ,

$$y''(x) + (\lambda/f)\phi(x) = 0 \quad (83)$$

Esta ecuación diferencial es no lineal, por la forma de la función  $\phi(x) = \sqrt{1+y'^2}$ .

Podemos comprobar, por sustitución, que una solución de esta ecuación, que satisface las condiciones en la frontera de nuestro caso, es

$$y(x) = b[2 - \cosh(x/b)], \quad (84)$$

donde estamos usando la función hiperbólica

$$\cosh(z) = (1/2)[e^z + e^{-z}]. \quad (85)$$

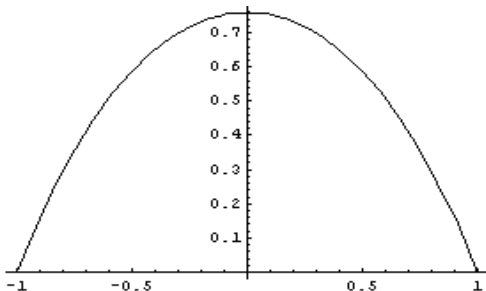
Al sustituir la solución, ecuación (84) en la ecuación (83), obtenemos que la fuerza de coceo resulta ser

$$f = \lambda b. \quad (86)$$

Ahora bien, nos encontramos otra vez con una propiedad interesante de esta solución para la curva  $y(x)$ . Si por otro lado imponemos la condición de que la fuerza cortante sea cero, para todo punto del arco, con el fin de encontrar qué forma geométrica satisface dicha condición, encontramos la misma ecuación diferencial, ecuación (83), que fue obtenida bajo la condición de hacer cero el momento flexionante para todo punto el arco.

Este resultado tiene interés matemático ya que las ecuaciones para  $M[y(x)]$  y  $f_c[y(x)]$  son en realidad funcionales, o sea funciones que van de las curvas  $y(x)$  a funciones de  $x$ . Se demuestra directamente, de las ecuaciones (52) y (57), que haciendo  $M = 0$  y derivando con respecto a  $x$  se obtiene exactamente la expresión que resulta de hacer  $f_c = 0$ . Por tanto, al derivar dos veces la expresión obtenida con  $M = 0$  se obtiene una ecuación diferencial para la que identificamos dos integrales de movimiento:  $M = 0$  y  $f_c = 0$ .

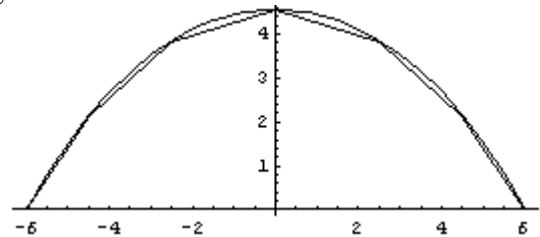
La solución de dicha ecuación diferencial, ecuación (83), expresada en la ecuación (84) es la ecuación de una catenaria (ver figura 16). Esto significa físicamente que el arco sometido a su propio peso y cuya forma geométrica es una catenaria, se encuentra en equilibrio total, es decir, libre de fuerzas y libre de momento flexionante y fuerza cortante. Cabe señalar que la catenaria es una forma muy conocida relacionada con otro sistema también en equilibrio, y nos referimos a la curva que describe una cadena flexible al colgarla de sus extremos; la diferencia entre estas dos catenarias estriba en que la de nuestro arco es convexa y la de la cuerda colgante es cóncava [9].



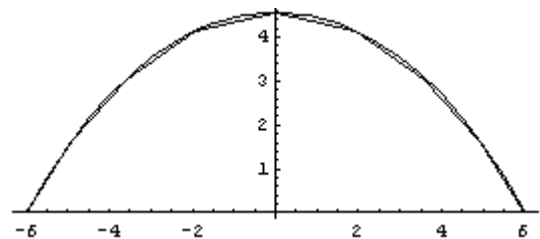
**FIGURA 16.** Bajo la condición de carga uniformemente distribuida sobre el arco, la forma catenaria queda libre de momento flexionante así como de fuerza cortante a lo largo de todo el arco.

Hagamos una comparación de las geometrías de equilibrio, entre el arco continuo y el poligonal, sometidos a su peso propio. En el caso continuo, como ya observamos, la curva es una catenaria convexa. Si esta curva la superponemos con la gráfica de la solución numérica para el caso poligonal, con un número cada vez mayor de segmentos, obtenemos que los vértices del arco discreto tiendan a acercarse cada vez más a la catenaria. Esto corresponde al límite continuo del arco poligonal. Aún con un número reducido de segmentos es posible percibir con claridad esta tendencia.

En la figura 17 mostramos la superposición de estas gráficas: en el caso (a) tenemos la catenaria dada por la ecuación (84) y un arco poligonal de seis segmentos idénticos, mientras que en el caso (b) tenemos la misma catenaria y un arco poligonal de ocho segmentos idénticos. Ambos arcos están cubriendo un claro total de 12 unidades. La geometría poligonal se obtiene por medio de un programa numérico.



**FIGURA 17a.** Superposición de la catenaria dada por la ecuación (84), con un arco poligonal de 6 segmentos iguales. Al imponer la condición de que ambos arcos tengan el mismo claro, observamos que sus flechas también coinciden. La forma poligonal se acerca a la curva continua, por debajo de ella.



**FIGURA 17b.** Superposición de la catenaria dada por la ecuación (84), con un arco poligonal de 8 segmentos iguales. Observamos aquí que el arco poligonal se acerca aún más a la curva continua.

Físicamente este resultado es consistente con el hecho de que al incrementar el número de segmentos del arco poligonal, en el límite estaremos precisamente en el caso de una cadena flexible. En principio en una cadena colgante podríamos invertir totalmente su curvatura y quedaría en equilibrio, pero tan altamente inestable que es casi imposible observar dicha situación en la práctica.

#### IV. CONCLUSIONES

En el presente trabajo se ha hecho un análisis de las condiciones geométricas de equilibrio estático para arcos simétricos sometidos a una distribución de carga dada. En el caso discreto, o bien de los arcos poligonales, se llega a expresiones matemáticas para fuerzas y momentos en cada

uno de los vértices, y la geometría de equilibrio se obtiene mediante la solución de un sistema de ecuaciones trascendentes. Por otro lado, en el caso de arcos continuos se obtienen fuerzas y momentos en cada punto del eje del arco. Si la geometría del arco se expresa como una función  $y(x)$ , entonces dichas variables físicas son funcionales de la variable  $x$ . La solución analítica del problema de encontrar la curva de equilibrio se obtiene en este caso mediante el establecimiento de una ecuación algebraica o bien diferencial no lineal para  $y(x)$ .

Este trabajo, como ya dijimos, no pretende tener un enfoque ingenieril, ya que por un lado se circunscribe estrictamente al análisis de arcos simétricos, de sección uniforme triarticulados, en donde es posible obtener sistemas cerrados de ecuaciones. Por otro lado, no se están considerando propiedades elásticas, ni de resistencia del material. El objetivo es presentar, dentro de este esquema concreto, un análisis sistemático y riguroso que nos permite obtener resultados generales donde podemos variar condiciones de carga y geometría. Se hace notar aquí también la utilidad de una herramienta matemática adecuada que nos lleva a establecer la relación entre el equilibrio y la forma geométrica.

Finalmente, a través de este análisis estamos presentando al lector un estudio de mayor claridad y un enfoque más didáctico que el de la bibliografía consultada. El método de análisis, tanto en cuanto a los conceptos de la estática, como por el desarrollo matemático, consideramos que puede constituir una aportación valiosa en la enseñanza de la Física.

## REFERENCIAS

- [1] Williams, K., *Arches: Gateways from Science to Culture*, Nexus Network Journal **8**, 2, Architecture and Mathematics, (Sept. 2006).
- [2] Huerta, S., *Mechanics of masonry vaults: the equilibrium approach*. Historical Constructions, (Lourenco, P. B., Roca, P. (Eds.), Guimaraes, 2001).
- [3] Lizárraga, I. M., *Estructuras Isostáticas*, (McGraw-Hill, México, 1990).
- [4] Lentovich, V., *Frames and Arches: Condensed Solutions for Structural Analysis*, (McGraw-Hill, USA, 1959).
- [5] Montrull, M., *Análisis de Estructuras: Métodos Clásicos y Matriciales*, (Horacio Carbajal, España, 2003).
- [6] Hibbeler, R. C., *Engineering Mechanics: Statics*, (Prentice Hall (11th Ed.), USA, 2006).
- [7] Johnston, R. Jr., Eisenberg, E. R. Staab, G. H., *Vector Mechanics for Engineers: Statics*, (McGraw-Hill Science/Engineering, Math, USA, 2003).
- [8] Nelson, E. W., Best, Ch. L. and McLean, W. G., *Schaum's Outline of Engineering Mechanics*, (McGraw-Hill, USA, 2007).
- [9] <http://mathworld.wolfram.com/Catenary.html> consultado el 20 de febrero de 2008.