

Un proceso de formalización matemática: Desde las rotaciones hasta las matrices de spin de Pauli



Orlando Organista, Juan C. Rodríguez, Andrés C. Sevilla

Grupo Física y Matemática, Departamento de Física, Universidad Pedagógica Nacional,
Calle 72 No.11-86. Bogotá, Colombia.

E-mail: jorganis@pedagogica.edu.co

(Recibido el 25 de Abril de 2008; Aceptado el 2 de Julio de 2008)

Resumen

Se reconocen temas de la física básica como altamente elaborados. Una de las tareas del profesor de física es aportar elementos que ayuden a ser estos inteligibles. En este artículo se presenta un proceso de formalización matemática en torno al tema de las rotaciones. Reconstruimos mediante analogías, deducciones e inferencias, el camino que nos lleva desde una descripción de las rotaciones en \mathbb{R}^3 hasta las matrices de spin de Pauli.

Palabras claves: Rotaciones, procesos de formalización, matrices de Pauli.

Abstract

We recognize the basic physics topics as highly processed. One of the tasks of physics teacher is to provide elements that help these topics be intelligible. This paper presents a mathematical formalization process on the issue of rotations. We rebuild through analogies, deductions and inferences a path that leads from a description of rotations in \mathbb{R}^3 until the parent spin of Pauli.

Key words: Rotations, formalization processes, Pauli's matrices.

PACS: 01.55.+b, 03.65.Ca, 02.10.Yn.

ISSN 1870-9095

I. INTRODUCCIÓN

Consideramos que una de las tareas del profesor de física es hacer inteligible los principios, las leyes, los procedimientos y los conceptos que resultan de la actividad científica. Asumir esta responsabilidad nos ha llevado a construir procesos lógicos de formalización matemática, que dan sentido y significado a representaciones simbólicas en torno a temas de la física básica considerados como altamente elaborados. Este proceso de entendimiento de naturaleza semántica implica a su vez procesos de comprensión por analogías, deducciones e inferencias a partir de ideas previas [1, 2].

El entendimiento y los procesos básicos del pensamiento resultan optimizados a través de la formalización matemática. Desde este punto de vista, esta se interpreta como un recurso del pensamiento para conocer y describir los fenómenos físicos.

Un tema de la física que exige cierto grado de elaboración matemática es el de las rotaciones. Por ejemplo, rotar un objeto puede resultar una acción sencilla de ejecutar. Sin embargo, cuando se trata de describir esta rotación en forma matemática puede resultar engorroso el

ejercicio, esto se evidencia en artículos como *Rotation Operators* [3] en donde se presentan diversos puntos de vista e interpretaciones de las rotaciones como operadores. Además, si se requiere de una generalización del concepto de rotación, como es el caso para la teoría del espín de los sistemas cuánticos, entonces las imágenes¹ formadas desde el pensamiento clásico [5] se tornan inadecuadas para la explicación de los fenómenos correspondientes. Estos problemas tanto de representabilidad de fenómenos y sus relaciones, como de búsqueda de universalidad encuentran un aliciente en la formalización matemática. Las formas matemáticas producto de este proceso se constituyen en un recurso del pensamiento necesario para hacer inteligible los fenómenos estudiados por las teorías modernas de la física [6], por ejemplo, Hestenes propone en su artículo *Reforming the mathematical language of physics* [7] como una herramienta para el modelado de la realidad física el uso de la matemática.

¹ Las imágenes, como lo dice Moreira hacen referencia a las representaciones internas, o *representaciones mentales*, que permiten "re-presentar" internamente el mundo externo [4].

Distintos estudios acerca de la teoría de rotaciones se presentan en la literatura, con enfoques diferentes, por ejemplo:

Marshall hace una comparación entre la representación de las rotaciones en el espacio tridimensional a partir de matrices reales 3×3 y matrices complejas 2×2 [8].

Por su parte Sivardiere muestra que los productos de rotaciones pueden ser estudiados desde un punto de vista geométrico, siguiendo un método sencillo, basado en la descomposición de las rotaciones en dos reflexiones (tipo espejo) [9].

Por su parte Koehler y Trickey estudian las rotaciones a partir de relaciones existentes entre las matrices de rotación y vectores de Euler [10].

En este artículo presentamos un proceso de formalización matemática que nos lleva desde la descripción de las rotaciones espaciales hasta las matrices de spin de Pauli.

Inicialmente, se explicitan y formalizan ciertas nociones básicas constitutivas de una rotación espacial (secciones II y III). Este ejercicio de abstracción nos lleva a representar una rotación en \mathbb{R}^3 como un elemento del grupo $SO(3)$. Mediante transformaciones adecuadas de las nociones constitutivas de una rotación se construye el grupo $SU(2)$, el cual es una representación en el plano complejo del grupo de rotaciones espaciales $SO(3)$ (sección IV) [11]. Interpretando los elementos de $SU(2)$ correspondientes a rotaciones respecto a los ejes coordenados como curvas y usando ideas del cálculo se obtienen las matrices de spin de Pauli. Se resaltan analogías entre los ejes $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ y estas matrices $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$.

II. NOCIONES BÁSICAS QUE SUBYACEN A LA IDEA DE ROTACIÓN

Para describir una rotación se requiere fundamentalmente un eje² \hat{n} y un ángulo α ; un eje queda especificado con ayuda de tres direcciones $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ mutuamente ortogonales. En la Fig. 1 se hace notar que \hat{n} queda determinado por la pareja (θ, φ) .

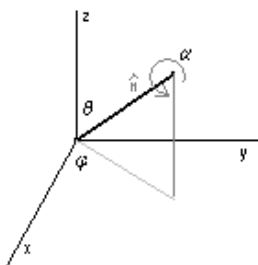


FIGURA 1. Eje de rotación.

Así, una rotación está definida por tres parámetros $(\theta, \varphi; \alpha)$ y la denotaremos por $R_{\hat{n}}(\alpha)$.

² Conjunto de puntos que permanecen fijos respecto a un movimiento de rotación dado.

En una rotación, un objeto pasa de una orientación a otra; podemos formalizar matemáticamente este cambio de orientación señalando que el vector de posición \vec{r} se ha transformado al vector de posición \vec{r}' ; simbólicamente esta afirmación la representamos por

$$\vec{r}' = R_{\hat{n}}(\alpha)\vec{r}, \quad (1)$$

donde,

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad y \quad \vec{r}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}; \quad (2)$$

estas ternas de números reales están referenciadas a partir de las tres direcciones que sirven para determinar el eje en el espacio \mathbb{R}^3 , Fig. 1.

Nótese que hay fundamentalmente dos entidades en una rotación: el operador de rotación $R_{\hat{n}}(\alpha)$ [3, 12] y el espacio que se transforma debido a la rotación, en nuestro caso \mathbb{R}^3 . En la siguiente sección mostramos cómo se puede representar $R_{\hat{n}}(\alpha)$.

III. FORMALIZACIÓN DE LAS ROTACIONES

Para llevar a cabo el proceso de formalización es suficiente tomar del espacio \mathbb{R}^3 sólo los vectores de posición unitarios, puesto que cualquier otro vector es múltiplo de alguno de estos. El conjunto que forman estos vectores constituyen lo que se conoce como la esfera unidad. Esta se denota como S^2 ; por lo tanto,

$$S^2 \equiv \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1\}. \quad (3)$$

Por otro lado, la acción de rotar se puede interpretar como una operación [3, 12] que actúa sobre un elemento de S^2 transformándolo en otro también de S^2 ; simbólicamente tenemos:

$$R_{\hat{n}}(\alpha): S^2 \rightarrow S^2. \quad (4)$$

Para determinar una representación matemática explícita, usamos el principio de isotropía del espacio \mathbb{R}^3 [13]. De acuerdo con este principio todas las direcciones son equivalentes y por lo tanto todos los puntos de S^2 rotan de la misma manera, es decir, en la misma dirección y con la misma intensidad (el mismo ángulo). Estos hechos se formalizan matemáticamente señalando que las rotaciones son transformaciones lineales, es decir,

$$\begin{cases} x' = a_{xx}x + a_{xy}y + a_{xz}z \\ y' = a_{yx}x + a_{yy}y + a_{yz}z \\ z' = a_{zx}x + a_{zy}y + a_{zz}z \end{cases}; \quad (5)$$

los coeficientes a_{ij} contienen la información acerca del eje de rotación y del ángulo de rotación, por lo tanto,

$$a_{ij} = a_{ij}(\theta, \psi; \alpha), \quad i, j = x, y, z; \quad (6)$$

los coeficientes a_{ij} correspondientes a una rotación respecto al eje \hat{z} , son fácilmente deducibles. Estos coeficientes los organizamos en filas y columnas, es decir, en una matriz y constituye la representación de la acción de rotar para este eje particular; específicamente,

$$R_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Permutando cíclicamente los ejes $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$, obtenemos las representaciones matriciales correspondientes a rotaciones respecto a los ejes \hat{x} y \hat{y} . Por ejemplo, cuando se efectúa la permutación cíclica, en la que el eje \hat{y} pasa a ser el eje \hat{z} , el eje \hat{z} pasa a ser el eje \hat{x} y el eje \hat{x} pasa a ser el eje \hat{y} , simbólicamente:

$$\begin{array}{ccc} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ & \searrow & \searrow \\ \hat{z} & \hat{x} & \hat{y} \end{array}, \quad (8)$$

se obtiene una reorganización de las entradas de la matriz $R_z(\alpha)$ dada por:

$$\begin{array}{ccc} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \hat{z} & \hat{x} & \hat{y} \end{array}, \quad (9)$$

que permite obtener la matriz de rotación correspondiente al eje \hat{y} ; por ejemplo, las entradas matriciales:

$$a_{xx}, a_{xy}, a_{xz}, \quad (10)$$

de la matriz $R_z(\alpha)$ pasan a ser las entradas matriciales

$$a_{zz}, a_{zx}, a_{zy}, \quad (11)$$

de la rotación respecto al eje \hat{y} . Se obtiene entonces,

$$R_y(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Análogamente se obtiene la representación matricial para la rotación con respecto al eje \hat{x} :

$$R_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Nótese dos hechos matemáticos esenciales presentes en estas representaciones matriciales: el determinante de cada una de estas matrices es 1 y la matriz inversa, en cada caso, es la matriz transpuesta. Así, surge la siguiente cuestión: ¿Estas dos características están presentes en todas las matrices de rotación?

Para responder la cuestión anterior se requiere determinar la matriz de rotación respecto a un eje \hat{n} arbitrario, lo cual a su vez exige definir la idea de composición. Esta operación queda definida como la realización consecutiva de rotaciones.

Por ejemplo, si rotamos primero respecto a un eje \hat{n}_1 y en seguida respecto a otro eje \hat{n}_2 , entonces representamos esta composición mediante:

$$R_{\hat{n}_3}(\alpha_3) = R_{\hat{n}_2}(\alpha_2) \circ R_{\hat{n}_1}(\alpha_1); \quad (14)$$

empíricamente, por ejemplo, se puede verificar que:

$$\begin{cases} R_x(\alpha) = R_y\left(\frac{\pi}{2}\right) \circ R_z(\alpha) \circ R_y\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ R_y(\alpha) = R_x\left(-\frac{\pi}{2}\right) \circ R_z(\alpha) \circ R_x\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{cases}, \quad (15)$$

y para un eje \hat{n} arbitrario,

$$R_{\hat{n}}(\alpha) = R_{\hat{n} \times \hat{z}}(-\beta) \circ R_z(\alpha) \circ R_{\hat{n} \times \hat{z}}(\beta), \quad (16)$$

donde β es el ángulo formado por los ejes \hat{n} y \hat{z} .

Nótese que $\hat{n} \times \hat{z}$ es un vector \hat{m} que pertenece al plano xy , pero una rotación con respecto a este vector \hat{m} , se puede obtener a partir de la composición,

$$R_{\hat{m}}(\beta) = R_z(-\gamma) \circ R_x(\beta) \circ R_z(\gamma), \quad (17)$$

donde γ es el ángulo entre el eje \hat{m} y \hat{x} .

De esta manera una rotación cualquiera $R_{\hat{n}}(\alpha)$ se puede generar a partir de rotaciones en los ejes coordenados. Para tal efecto basta sustituir (17) en (16):

$$R_{\hat{n}}(\alpha) = R_z(-\gamma) \circ R_x(-\beta) \circ R_z(\gamma) \circ R_z(\alpha) \circ R_z(-\gamma) \circ R_x(\beta) \circ R_z(\gamma). \quad (18)$$

La cuestión planteada inicialmente en esta sección se puede responder con ayuda de la ecuación anterior. Puesto que el determinante del producto de matrices es el producto de sus determinantes, y como cada matriz de rotación respecto a los ejes coordenados tiene determinante 1 se obtiene trivialmente que:

$$\det R_n(\alpha) = 1 \quad (19)$$

Igualmente, puesto que el producto de dos matrices ortogonales es ortogonal, y las matrices dadas en (7), (12) y (13) son ortogonales entonces resulta evidente que $R_n(\alpha)$ es ortogonal.

Así, las matrices de rotación del espacio \mathbb{R}^3 son matrices 3×3 , ortogonales y de determinante 1; este conjunto tiene estructura de grupo [11,14] y se conoce en la literatura como el grupo $SO(3)$.

Una conclusión preliminar de este proceso de formalización matemática nos lleva a afirmar que lo que se rota es S^2 y la acción de rotar la efectúan los elementos del grupo $SO(3)$.

IV. TRANSFORMACIONES

Vamos a transformar la esfera unidad S^2 la representación matricial de las rotaciones, las condiciones que formalizan la acción de rotar e incluso, vamos a tener otra representación para el sistema de referencia $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$. Estas transformaciones permiten generalizar a otros "espacios" la idea de rotación.

A. Transformando la esfera S^2 : proyección estereográfica

La asociación biunívoca entre los puntos de $S^2 - \{(0,0,1)\}$ y los puntos del plano cartesiano uv , dada por:

$$u = \frac{x}{1-z}, \quad v = \frac{y}{1-z}, \quad (20)$$

o

$$x = \frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \quad y = \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \quad z = \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1}, \quad (21)$$

se conoce como proyección estereográfica [15, 16]; una representación visual se muestra en la fig. 2. Esta asociación permite transformar la esfera en el plano \mathbb{R}^2 ; y mediante la función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow C_\infty$ definida por:

$$f((\hat{u}, v)) = u + iv, \quad (22)$$

se logra poner en correspondencia biunívoca los puntos de S^2 con los números complejos C_∞ . Nótese que $(0,0,1)$ se aplica en ∞ . De esta manera S^2 se ha transformado en C_∞ . Surge entonces la pregunta: ¿cómo se transforman las matrices de rotación cuando S^2 se transforma en C_∞ ? Abordamos esta cuestión a continuación.

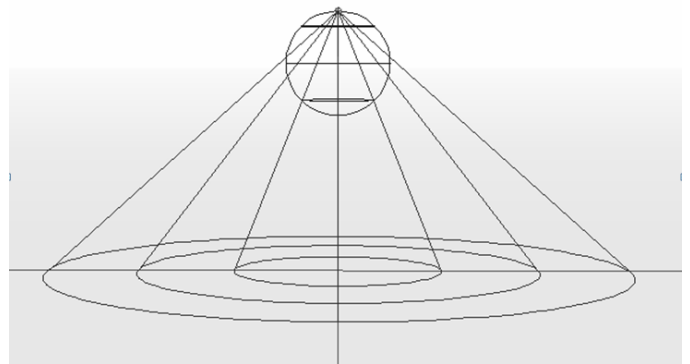


FIGURA 2. Proyección estereográfica.

B. Transformando a $SO(3)$: la transformación de Möbius

Un elemento $g \in SO(3)$ hace corresponder elementos de S^2 con elementos de S^2 , pero S^2 se ha transformado en C_∞ . De esta manera g induce una correspondencia \tilde{g} de C_∞ en C_∞ . Por ejemplo, si:

$$g = R_z(\alpha), \quad (23)$$

entonces, la correspondiente $\tilde{g}: C_\infty \rightarrow C_\infty$, viene determinada por:

$$\tilde{g} = ze^{i\alpha}, \quad (24)$$

puesto que corresponde a una rotación del plano como se observa en la Fig 2.

Sin embargo, para una rotación arbitraria, $g = R_z(\alpha)$, la correspondiente \tilde{g} no se obtiene directamente. Además las dos condiciones que definen a $SO(3)$, $\det A = 1$ y $AA^T = I$, no se mantienen en el correspondiente caso de C_∞ en C_∞ .

Para recuperar las condiciones que definen a $SO(3)$, en el contexto del plano complejo, necesitamos que la transformación inducida \tilde{g} tenga naturaleza matricial. En teoría de variable compleja se estudia el conjunto de transformaciones de C_∞ en C_∞ [17] definidas por:

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (25)$$

donde a, b, c, d y z representan números complejos. Este tipo de transformaciones se conocen como transformaciones de Möbius, y son inducidas por matrices 2×2 de la forma:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad (26)$$

El conjunto de matrices de Möbius tiene estructura de grupo [11, 14] con la composición de funciones como operación entre los elementos. Esta operación se corresponde con la multiplicación de matrices 2×2 .

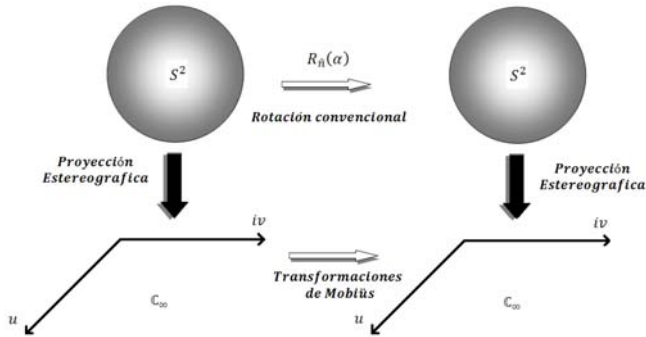


FIGURA 3. Esquema que permite representar las rotaciones en el contexto del plano complejo.

De esta manera tenemos transformaciones del plano complejo dadas en forma matricial. Un subgrupo de estas transformaciones se asociarán con las rotaciones de la esfera S^2 , y nos permitirán reinterpretar las condiciones que definen a $SO(3)$, en el contexto del plano complejo; un esquema de esta asociación se muestra en la Fig. 3. Para una visualización de las transformaciones de Möbius en relación con distintos movimientos de la esfera unidad se invita a ver la referencia [18].

El punto de partida para determinar el subgrupo de transformaciones de Möbius correspondientes a $SO(3)$ es la ecuación (18). Esta ecuación muestra que una rotación arbitraria se puede generar por medio de una composición de rotaciones respecto a los ejes coordenados. Por esta razón se requiere determinar las transformaciones de Möbius correspondientes a estas rotaciones. Esta tarea se lleva a cabo a continuación.

C. Las transformaciones de Möbius correspondientes a $R_x(\alpha)$, $R_y(\alpha)$ y $R_z(\alpha)$

Escribiendo (24) en la forma:

$$\tilde{g}(z) = \frac{e^{\frac{i\alpha}{2}}z + 0}{0z + e^{-\frac{i\alpha}{2}}}, \quad (27)$$

se obtiene la transformación de Möbius correspondiente a $R_z(\alpha)$ es decir,

$$R_z(\alpha) \rightarrow U_z(\alpha) = \begin{pmatrix} e^{\frac{i\alpha}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\alpha}{2}} \end{pmatrix}, \quad (28)$$

Para determinar las correspondientes transformaciones de Möbius de $R_x(\alpha)$ y $R_y(\alpha)$ usaremos (15); para tal efecto se requiere primero determinar las transformaciones de Möbius correspondientes para $R_x(\frac{\pi}{2})$, $R_x(-\frac{\pi}{2})$, $R_y(\frac{\pi}{2})$, $R_y(-\frac{\pi}{2})$.

La rotación $R_x(\frac{\pi}{2})$ produce la siguiente secuencia de asociaciones entre los puntos de S^2 :

$$(0,1,0) \rightarrow (0,0,1) \rightarrow (0,-1,0) \rightarrow (0,0,-1) \rightarrow (0,1,0); \quad (29)$$

esta se corresponde con la secuencia de números complejos:

$$i \rightarrow \infty \rightarrow -i \rightarrow 0 \rightarrow i, \quad (30)$$

debido a la proyección estereográfica, ver figura 4.

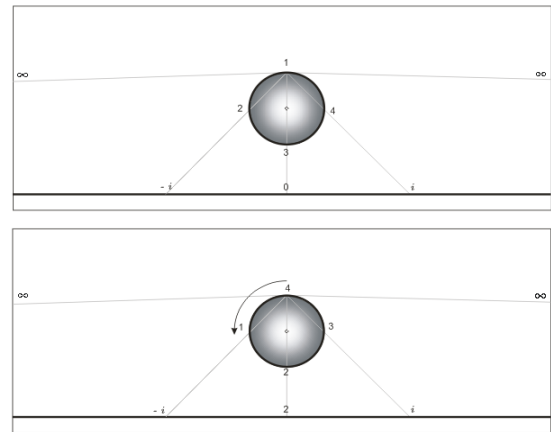


FIGURA 4. Rotación $R_x(\frac{\pi}{2})$ y su proyección en C_∞ .

Así, se requiere una transformación de Möbius $f(z)$ tal que:

$$f(i) = \infty, \quad f(\infty) = -i, \quad f(-i) = 0, \quad f(0) = i, \quad (31)$$

estas restricciones nos permiten determinar los coeficientes a , b , c y d , obteniendo finalmente la transformación de Möbius:

$$f(z) = \frac{z+i}{iz+1}; \quad (32)$$

esta transformación es inducida por la matriz 2×2

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}. \quad (33)$$

Siguiendo este mismo procedimiento se obtienen las transformaciones de Möbius:

$$\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (34)$$

correspondientes a las rotaciones: $R_{\hat{x}}(-\frac{\pi}{2})$, $R_{\hat{y}}(\frac{\pi}{2})$ y $R_{\hat{z}}(-\frac{\pi}{2})$ respectivamente. Sin pérdida de generalidad, se puede escoger en vez de (33) y (34) las correspondientes matrices de determinante 1.

Como se mencionó anteriormente, con ayuda de (15) una rotación arbitraria sobre el eje \hat{x} se puede escribir como:

$$R_{\hat{x}}(\alpha) = R_{\hat{y}}\left(\frac{\pi}{2}\right) \circ R_{\hat{z}}(\alpha) \circ R_{\hat{y}}\left(-\frac{\pi}{2}\right), \quad (35)$$

reemplazando estas rotaciones por las correspondientes matrices 2×2 (28, 34) se obtiene:

$$U_x(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha/2} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (36)$$

y efectuando las operaciones se halla finalmente la transformación de Möbius correspondiente a $R_{\hat{x}}(\alpha)$:

$$U_x(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} & i \sin \frac{\alpha}{2} \\ i \sin \frac{\alpha}{2} & \cos \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}. \quad (37)$$

Igualmente a partir de la relación dada en (15) y siguiendo el procedimiento anterior obtenemos la transformación de Möbius $U_y(\alpha)$ correspondiente a $R_{\hat{y}}(\alpha)$:

$$U_y(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} & -\sin \frac{\alpha}{2} \\ \sin \frac{\alpha}{2} & \cos \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}. \quad (38)$$

Nótese que $U_x(\alpha)$, $U_y(\alpha)$ y $U_z(\alpha)$ son matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}, \quad (39)$$

tal que $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

Ahora, (18) muestra que cualquier rotación se puede expresar en términos de rotaciones respecto a los ejes coordenados. Así, la transformación de Möbius correspondiente a una rotación arbitraria $R_{\hat{n}}(\alpha)$ es el producto de matrices U_x , U_y y U_z y estos productos no alteran la característica dada por (39); es decir, tenemos dos cualidades esenciales presentes en todas las matrices $U_n(\alpha)$: el determinante es 1 y son matrices unitarias: $U^*U = I$. Se toman estos dos hechos matemáticos como las condiciones que definen el grupo de rotaciones en el contexto del plano complejo; este es conocido en la

literatura como el grupo $SU(2)$. De esta forma $SO(3)$ se representa ahora como $SU(2)$.

V. CURVAS, DERIVADAS Y LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

En cursos introductorios de análisis matemático de una variable real, se estudian las condiciones para representar una función $f(t)$ mediante una serie de Taylor [19]. Asumiremos estas condiciones en lo que sigue. Entonces realizando una expansión alrededor de $t_0 = 0$, la función $f(t)$ se representa mediante la serie de potencias:

$$f(t) = f(0) + tf'(0) + \frac{1}{2!}t^2f''(0) + \dots, \quad (40)$$

si efectuamos las sustituciones:

$$f'(0) = X, \quad (41)$$

$$f''(0) = X^2,$$

$$f^{(n)}(0) = X^n,$$

en (40), entonces

$$f(t) = e^{tX}. \quad (42)$$

Esta ecuación nos muestra que la función exponencial permite vincular una curva $f(t)$, Fig. 5, y sus derivadas en el origen.

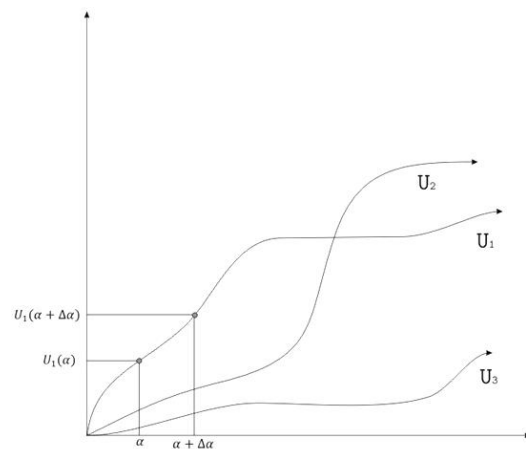


FIGURA 5. Interpretación de curvas o familias de rotaciones en los ejes.

Aplicaremos esta idea a las matrices U 's. Para tal efecto, consideramos estas matrices como tres tipos de curvas. En analogía con (41), tenemos que las derivadas en el origen para las curvas $U_x(\alpha)$, $U_y(\alpha)$ y $U_z(\alpha)$ son:

$$X_x = \frac{d}{d\alpha} U_x(\alpha)|_{\alpha=0} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \frac{i}{2} \sigma_x, \quad (43)$$

$$X_y = \frac{d}{d\alpha} U_y(\alpha)|_{\alpha=0} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \equiv -\frac{i}{2} \sigma_y,$$

$$X_z = \frac{d}{d\alpha} U_z(\alpha)|_{\alpha=0} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \equiv \frac{i}{2} \sigma_z,$$

donde σ_x , σ_y y σ_z son las matrices de spin de Pauli. Entonces las expresiones análogas a (42) son:

$$U_x(\alpha) = \exp\left(i\frac{\alpha}{2}\sigma_x\right), \quad (44)$$

$$U_y(\alpha) = \exp\left(-i\frac{\alpha}{2}\sigma_y\right),$$

$$U_z(\alpha) = \exp\left(i\frac{\alpha}{2}\sigma_z\right),$$

Continuando con la construcción de la generalización del concepto de rotación a otros espacios por medio de analogías, deducciones e inferencias, surge la cuestión ¿cuál es el análogo en \mathbb{R}^3 de las matrices de spin de Pauli?, esta pregunta será tratada en la siguiente sección.

VI. LOS EJES $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ Y LAS MATRICES σ

Hay profundas relaciones entre el conjunto de vectores unitarios $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ y el conjunto de matrices de Pauli. Por ejemplo, las relaciones:

$$\begin{cases} \sigma_x \sigma_y = i\sigma_z \\ \sigma_y \sigma_z = i\sigma_x \\ \sigma_z \sigma_x = i\sigma_y \end{cases}, \quad (45)$$

son análogas al producto vectorial de los vectores de dirección $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$. Igualmente, las relaciones:

$$\begin{aligned} \exp\left(-i\frac{\theta}{2}\sigma_z\right)\sigma_x\exp\left(i\frac{\theta}{2}\sigma_z\right) &= \sigma_x \cos\theta + \sigma_y \sin\theta, \\ \exp\left(-i\frac{\theta}{2}\sigma_z\right)\sigma_y\exp\left(i\frac{\theta}{2}\sigma_z\right) &= -\sigma_x \cos\theta + \sigma_y \sin\theta, \quad (46) \\ \exp\left(-i\frac{\theta}{2}\sigma_z\right)\sigma_z\exp\left(i\frac{\theta}{2}\sigma_z\right) &= \sigma_z, \end{aligned}$$

permiten enfatizar el comportamiento vectorial de las matrices σ_x , σ_y y σ_z como análogo al comportamiento vectorial de los vectores directores $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$, pues, (46) evidencia que las matrices de Pauli se transforman como las componentes de un vector bajo una rotación sobre el eje σ_z en dirección del reloj.

Estas inferencias permiten afirmar que las matrices σ_x , σ_y y σ_z se pueden considerar como la base canónica de un espacio vectorial análogo al espacio \mathbb{R}^3 . Denominamos a este espacio el σ -espacio.

El análogo a la esfera unidad S^2 en este σ -espacio viene dado por el conjunto de matrices:

$$n_x \sigma_x + n_y \sigma_y + n_z \sigma_z, \quad (47)$$

donde n_x , n_y y n_z son números reales tales que:

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1, \quad (48)$$

esta analogía se justifica por la relación:

$$(\hat{n} \cdot \vec{\sigma})^2 = I, \quad (49)$$

donde $\hat{n} \cdot \vec{\sigma}$ es la abreviación de (47).

VII. CONCLUSIONES

Dos ideas que subyacen al concepto de rotación son la acción de rotar y el espacio de rotación. La formalización de estas ideas nos ha llevado, en el caso de rotaciones ordinarias, a construir el grupo $SO(3)$ como operadores que actúan sobre la esfera unidad S^2 . Este esquema permite concebir la idea de rotación en otros espacios. Es así como se construyó el grupo $SU(2)$ actuando sobre el σ -espacio. Ilustramos de esta manera cómo la formalización matemática es un recurso del pensamiento que ayuda a la construcción de modelos explicativos coherentes, necesarios para la comprensión de las teorías modernas de la física.

VIII. AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue realizado con apoyo del proyecto de investigación DFI-075-08. Se agradece especialmente la colaboración de D. Jaimes y V. Gómez por sus discusiones iniciales en el desarrollo de este proceso de formalización matemática llevado a cabo en este artículo.

IX. REFERENCIAS

[1] Vera, J. Pimentel, E. and Batista, F., *Redes semánticas: Aspectos teóricos, técnicos, metodológicos y analíticos*, Ra Ximhai **1**, 439-451 (2005).

- [2] Organista, O., Gómez, V., Jaimes, D. y Rodríguez, J., *Una idea profunda en la comprensión del mundo físico: El principio de la superposición de estados*, Lat. Am. J. Phys. Educ. **1**, 83-88 (2007).
- [3] Wolf, A., *Rotations Operators*, Am. J. Phys. **37**, 531-536 (1969).
- [4] Moreira, M. A., *Modelos mentais*, Investigações em Ensino de Ciências. **1**, 196-206 (1996).
- [5] Schwinger, J., *Quantum Mechanics: symbolism of atomic measurements* (edited by Berthold-Georg Englert, Berlin, 2001).
- [6] Boniolo, G. and Budinich, P., *The role of the mathematics in physical sciences and Dirac's methodological revolution* (Springer, Netherlands, 2005).
- [7] Hestenes, D., *Reforming the mathematical language of physics*, Am. J. Phys. **71**, 104-121 (2003).
- [8] Marshall, J., *Representation of Rotations in Three-Space by Complex 2X2 Matrices*, Am. J. Phys. **24**, 515-518 (1956).
- [9] Sivardiere, J., *Products of rotations: A geometrical point o view*. Am. J. Phys. **62**, 737-743 (1994).
- [10] Koehler, T. and Trickey, S., *Euler vectors and rotations about an arbitrary axis* (IBM research laboratory, California, 1977).
- [11] Hall, B., *Lie groups, Lie algebras and representations* (editorial Board, United States of America, 2003).
- [12] Leubner, C., *Coordinate-free rotation operator*, Am. J. Phys. **47**, 727-729 (1979).
- [13] Landau, L. D. and Lifshitz, E. M., *Mecánica vol. 1*, (editorial Reverté, Barcelona, 1975).
- [14] Hamermesh, M., *Group theory and its applications to physical problems* (Addison-Wesley publishing company, London, 1962).
- [15] Rubiano, G., *Topología general* (Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 2002).
- [16] Goldstein, H., *Classical Mechanics*, (Addison-Wesley, 2nd ed., Massachusetts, 1980).
- [17] Murray, S., *Variable compleja* (McGraw-hill, Colombia, 1971).
- [18] Rogness, J., <http://www.youtube.com/watch?v=JX3VmDgiFnY>, consultado el 10 de abril del 2008.
- [19] Apostol, T., *Análisis Matemático* (Reverté, Barcelona, 1960).