Cálculo didáctico de la edad del Universo y la importancia de la constante cosmológica en un modelo FRW

Rafael Hernández Jiménez[1], Claudia Moreno[2], Daniel Sánchez Guzmán[3] y Ricardo García Salcedo[3]

[1] *División de Ciencias e Ingenierías del Campus León de la Universidad de Guanajuato, Loma del Bosque No. 103 Col. Lomas del Campestre C.P. 37150, León, Guanajuato, México.*

[2] *Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingeniería de la Universidad de Guadalajara, Av. Revolución No. 1500, Sector Reforma, C.P. 44430, Guadalajara, Jal., México.*

[3] *Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada-Unidad Legaría del Instituto Politécnico Nacional, Legaría #694. Col. Irrigación, C.P. 11500, México D.F.*

E-mail: fabulosorafa@fisica.ugto.mx; claudia.moreno@cucei.udg.mx; dsanchezg@ipn.mx; rigarcias@ipn.mx

Resumen

Partiendo del modelo cosmológico de Friedmann-Robertson-Walker (FRW), se puede encontrar una solución explícita para el factor de escala *a(t)* utilizando la ecuación de estado de un fluido barotrópico y la ecuación de Friedmann. La ecuación de estado describe varios tipos de materia (energía): materia no relativista, radiación y energía de vacío (constante cosmológica), donde para cada componente existe una expresión explícita para $a=a(t)$ que a su vez se relaciona con una densidad de energía $\rho=\rho(t)$. Se considera que cada etapa del Universo estuvo dominada por un tipo de materia distinto y las expresiones que describen la evolución temporal de cada una de ellas son independientes unas de otras. En este artículo se calcularán todos los casos para el tiempo transcurrido entre la famosa Gran Explosión y nuestra época actual, para ello se utilizarán los datos experimentales tomados del artículo [1].

Palabras clave: Modelo cosmológico FRW, Edad del Universo, Observaciones cosmológicas.

Abstract

Starting with the Friedmann-Robertson-Walker (FRW) cosmological model, we can find an explicit solution for the scale factor *a(t)* using the baryotropic equation of estat and the Friedmann equation. This barotropic equation describes several types of matter (energy): non-relativistic matter, radiation and vacuum energy (cosmological constant), therefore exists an explicit expression for $a=a(t)$ that at the same time relates to a density of energy $\rho=\rho(t)$ for each component. It is considered that each stage of the Universe was dominated by one type of material, and the expressions that describe the time evolution are independent each other. By using experimental data from [1] the calculations of the age of the Universe for each type of matter are carried out.

Keywords: Cosmological model FRW, Age of the Universe, Cosmological observations.

PACS: 01.55.+b, 04.20.Jb, 98.80.Jk, 98.80.Es **ISSN 1870-9095**

I. INTRODUCCIÓN

La cosmología estudia el nacimiento y evolución del Universo. Antiguamente la cosmología estaba basada en las observaciones astronómicas realizadas a través de los instrumentos más modernos de la época. Recordemos por ejemplo, la utilización de observatorios sin telescopios utilizados por el astrónomo danés Tycho Brahe alrededor de 1573, quien realizó innumerables observaciones de las posiciones de estrellas y de los llamados “errantes” (planetas) que sirvieron posteriormente a Johannes Kepler para la formulación de las famosas leyes que gobiernan el movimiento planetario.

Actualmente, la cosmología está basada desde el punto de vista teórico en la Teoría de la Relatividad General (TRG) formulada por Albert Einstein (1915). La primera solución cosmológica a las ecuaciones de campo gravitacional de la TRG está basada en la idea de que el Universo es muy parecido en todas las direcciones en que se observe (isotropía), y que su composición es la misma en todos lados (homogéneo) a escalas mayores a 100 megaparsec[1]. Los argumentos anteriores dieron origen a lo que se conoce como el principio cosmológico [2-3], y el modelo que resulta es conocido como la “Gran Explosión” o por su nombre en inglés “Big Bang” (BB) [4-5]; también

[1] El pársec o parsec (símbolo pc) es una unidad de longitud equivalente a 3.26 años luz (3.0857×10^{16}m).

es conocido como modelo de Friedmann-Robertson-Walker.

El modelo de FRW nos da una idea de la forma en la que se originó el Universo, aunque no precisamente al tiempo cero, ya que para ello se requiere un periodo conocido como inflación [6], el cual queda fuera del alcance de este artículo y que será tratado en un artículo posteriormente. En este sentido, el modelo de FRW nos dice que el Universo comenzó con una densidad infinita de materia, en este caso constituida por materia ordinaria que puede ser polvo no relativista (p=0) radiación electromagnética $\left(p=\frac{\rho}{3}\right)$ o incluso lo que se conoce como constante cosmológica (p=-ρ) [4]. Al mismo tiempo, este modelo nos predice tanto la cantidad como el tipo de átomos que surgieron de dicha densidad de energía (nucleosíntesis) [7].

Para los propósitos de este trabajo utilizaremos para la deducción de las ecuaciones dinámicas las ecuaciones de Einstein (EE), en donde consideraremos una métrica homogénea e isotrópica de curvatura constante y un tensor de energía momento para un fluido perfecto [4]. Una vez que sean obtenidas las ecuaciones dinámicas, estas se emplearan para calcular la edad del Universo en los diferentes tipos de materia mencionados previamente.

El presente artículo está organizado de la siguiente manera: En la sección II, se obtienen las ecuaciones dinámicas del modelo cosmológico FRW a partir de la TRG. En la sección III se obtienen las soluciones a las ecuaciones para ρ y $a(t)$. La edad del Universo para los distintos tipos de materia se calcula en la sección IV, y finalmente en la sección V se da una breve conclusión.

II. ECUACIONES BÁSICAS DEL MODELO COSMOLOGÍCO DE FRW

En la década de 1920, Hubble se encontraba estudiando objetos cósmicos desde el Monte Wilson, los cuales se conocían como nebulosas o “universos isla”. Wilson determinó la distancia a la galaxia de Andrómeda, 700.000 años luz, mediante estrellas de brillo variable conocidas como cefeidas [8]. Asimismo, usando un método conocido como escala de distancias cósmicas [5], encontró las distancias a diferentes nebulosas que resultaron estar más allá del tamaño de nuestra galaxia. Concluyó entonces que los “universos islas” están situados fuera de nuestra galaxia y se determinó que eran otras galaxias como la nuestra.

Debido a las observaciones de Wilson, Hubble determinó que la velocidad de recesión (velocidad con la que se alejan de nosotros) de las galaxias y la distancia a la que se encuentran de nosotros, están correlacionadas de tal forma que mientras más alejadas estuvieran de la Tierra, más rápidamente se alejaban de nosotros, este resultado se conoce como la ley de Hubble [8].

Una vez que se conocieron los datos que aseguraban que las galaxias se alejaban unas de otras, se entendió que el Universo se está expandiendo [9]. Hubble encontró la siguiente relación, conocida actualmente como ley de Hubble:

$$v = Hd, \tag{1}$$

donde v es la velocidad de recesión entre las galaxias, d es la distancia entre ellas y, H es la constante de Hubble. El valor para esta constante H fué determinada por Hubble, y tenia un valor de $500\frac{km/s}{Mpc}$, es decir, por cada megaparsec de distancia la velocidad de recesión aumenta en 500*km/s*. La utilización de cada vez mejores métodos de medición de distancias y velocidades ha llevado a que estos valores sean cada vez más precisos, el valor más actual ha sido proporcionado por el satélite Wikilson Microwave Anisotropy Probe (WMAP), el cual tiene un valor de $H_0 = 100h\frac{km/s}{Mpc}$, donde el subíndice 0 corresponde a considerar el valor actual (en esta época de la historia del Universo en la que vivimos). El valor de la razón de expansión normalizada, h, es 0, 72±0, 03 [1].

La ley de Hubble es de gran importancia para tratar de entender la historia del Universo, ya que ha dado pruebas contundentes de que el Universo se encuentra en una etapa de expansión.

Tomando en cuenta el principio cosmológico, vamos a considerar una geometría que represente un espacio-tiempo de curvatura constante, homogéneo e isótropo. Esta geometría, la cual está representada por lo que se conoce como métrica $g_{\mu\nu}$, es la de Robertson-Walker:

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu, \\ &= c^2dt^2 - a(t)^2\left[\frac{dr^2}{1-kr^2}+r^2\left(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2\right)\right], \end{aligned} \tag{2}$$

en la primera expresión un índice arriba y el mismo índice abajo implica suma sobre él, $\mu,\nu = 0,...,3,$ c es la velocidad de la luz, t es el tiempo cosmológico, $a(t)$ es el factor de escala (magnitud que permite dar una medida de la evolución de las distancias entre dos puntos fijos en una sección espacial dada), k es la curvatura de la sección espacial dada y toma los valores 0,1 y -1 (espacio de curvatura cero, positiva y negativa), r la coordenada radial, θ la coordenada ángulo polar y φ la coordenada ángulo azimutal. Visto de esta manera, el espacio-tiempo admite ser rebanado en cortes espaciales perpendiculares a la dirección del tiempo cosmológico t, donde k es la curvatura de cada corte espacial, homogéneo e isótropo. La forma de $a(t)$ depende de las propiedades de la materia del universo, como lo veremos en la siguiente sección.

El corrimiento al rojo es la relación entre la luz emitida por un objeto estelar y la luz de ese mismo objeto que nosotros medimos, la cual es distinta debido a la expansión del Universo. En muchas ocasiones se utiliza el corrimiento al rojo como parámetro de evolución del Universo. La longitud de onda de la luz emitida se incrementa proporcionalmente al factor de escala, cuyo efecto puede ser cuantificado por este corrimiento al rojo:

$$1+z=\frac{\lambda_0}{\lambda}=\frac{a_0}{a}. \tag{3}$$

La TRG de Ensitein fue formulada con el fin de generalizar la teoría de la relatividad especial para sistemas inerciales, y considera sistemas de referencia no inerciales [7]. La TRG esencialmente nos dice cómo es que el espacio-tiempo se deforma debido a la distribución de masa-energía contenida en él, por lo que se considera una generalización de la teoría de la gravitación universal de Newton.

Las ecuaciones dinámicas de la TRG vienen dadas por las EE:

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}-\Lambda g_{\mu\nu}=\frac{\kappa^2}{c^4}T_{\mu\nu}, \tag{4}$$

donde $k^2=8\pi G$, $g_{\mu\nu}$ es el tensor métrico, $R_{\mu\nu}$ el tensor de curvatura de Ricci, $R=g_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ el escalar de curvatura de Ricci, Λ es la constante cosmológica, c es la velocidad de la luz (en lo que sigue del texto se considerará con valor 1), G es la constante de gravitación de Newton y, finalmente, el tensor de energía-momento que representa la distribución de la materia-energía en el espacio-tiempo es:

$$T_{\mu\nu}=(\rho+p)u_\mu u_\nu-pg_{\mu\nu}, \tag{5}$$

el cual en este caso, representa un fluido perfecto de densidad ρ y de presión isotrópica $p=p(\rho)$, ambas cantidades son funciones que dependen solo de t. Además la 4-velocidad local del fluido temporal está dada por $u_\mu=(1,0,0,0)$ lo cual implica que $T_{\mu\nu}=diag(\rho,p,p,p)$.

Sustituyendo (2) y (5) en las EE (4), solo se obtienen dos ecuaciones independientes:

$$\begin{aligned} H^2&\equiv\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2=\kappa^2\frac{\rho}{3}-\frac{k}{a^2}+\frac{\Lambda}{3},\\ \frac{\ddot a}{a}&=-\frac{\kappa^2}{6}(\rho+3p)+\frac{\Lambda}{3}, \end{aligned} \tag{6}$$

donde $H=H(t)$ es el parámetro de Hubble, el punto sobre la letra indica derivada con respecto a t y la constante cosmológica se relaciona con la densidad de energía del vacío como $\rho_{vac}=\frac{\Lambda}{\kappa^2}$. La primera Ec. (6) es conocida como ecuación de Friedmann (EF), mientras que la segunda de ellas es conocida como ecuación de Raychaudhuri (ER). La ecuación de evolución del contenido material de nuestro Universo, la cual se conoce como ecuación de conservación de la energía, está dada por:

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu}=0,$$

donde ∇_μ es la derivada covariante, es decir, la derivada que es invariante ante transformaciones generales de coordenadas. Sustituyendo (5) en la ecuación anterior se obtiene que, para un fluido perfecto, la ecuación de conservación es:

$$\dot\rho+3H(\rho+p)=0. \tag{7}$$

De estas tres ecuaciones dinámicas, (6) y (7), dos son independientes y la tercera se puede obtener de las otras dos. Estas representan el modelo conocido como FRW o de la Gran Explosión y sus soluciones nos dicen cómo evoluciona nuestro Universo. El modelo FRW también puede obtenerse con argumentos que no requieren TRG [4-5], por ejemplo. En la siguiente sección damos la solución de estas ecuaciones.

Una cantidad útil para nuestros fines, es el parámetro de densidad cosmológica dado por:

$$\Omega=\frac{\kappa^2\rho}{3H^2}+\frac{\Lambda}{3H^2}=\frac{\rho}{\rho_c}+\frac{\rho_{vac}}{\rho_c}, \tag{8}$$

que nos describe la densidad de materia total en el Universo, donde ρ_C es conocida como la densidad critica:

$$\rho_c=\frac{3H^2}{\kappa^2}. \tag{9}$$

Actualmente, la densidad crítica tiene un valor de $\rho_{c0}=1,88\times10^{-26}h^2kgm^{-3}$, donde h=0.72±0.03 [1]. Esta densidad corresponde aproximadamente a 3 átomos de hidrógeno por metro cúbico.

Tomando en cuenta la expresión (8), la ecuación de Friedmann puede escribirse también como:

$$\Omega-1\equiv\Omega_b+\Omega_\Lambda-1=\frac{k}{H^2a^2}, \tag{10}$$

donde $\Omega_\Lambda=\frac{\Lambda}{3H^2}$, corresponde a la densidad de energía de la constante cosmológica, y $\Omega_b=\frac{\kappa^2\rho}{3H^2}$, corresponde a la densidad de la materia no relativista y la radiación. El signo de k está determinado por el valor de Ω y, por tanto, nos indica a cuál de las tres geometrías de RW corresponde:

1. Si la densidad de materia $\rho<\rho_{c0}$ entonces se sigue que $\Omega<1$, y por lo tanto $k=-1$ lo cual representa un Universo abierto desde el punto de vista geométrico.
2. Si la densidad de materia $\rho>\rho_{c0}$ entonces se sigue que $\Omega>1$, y por lo tanto $k=1$ lo cual representa un Universo cerrado desde el punto de vista geométrico.
3. Si la densidad de materia $\rho=\rho_{c0}$ entonces se sigue que $\Omega=1$, y por lo tanto $k=0$ el cual representa un Universo plano desde el punto de vista geométrico.

El parámetro Ω es de suma importancia ya que nos dice el tipo de materia que contiene el Universo. Así, si tenemos varios tipos de materia o energía dentro de nuestro Universo, entonces la expresión general de la Ec. (10) toma la forma:

$$\Omega - 1 \equiv \sum_i \Omega_i + \Omega_\Lambda - 1 = \frac{k}{H^2 a^2}, \tag{11}$$

donde la suma es sobre las diferentes especies de materia que contiene el Universo.

A finales de la década de 1970, Vera Rubin y W. Kent Ford, Jr. [10] descubrieron lo que ahora se conoce como materia obscura, un tipo de materia que tiene efecto sobre el movimiento de las galaxias pero que no interactúa con materia ordinaria. La densidad total de materia actual está dada por:

$$\Omega_m = \Omega_b + \Omega_{eo}, \tag{12}$$

donde Ω_{eo} representa la densidad de materia obscura y Ω_b la densidad de materia bariónica, que representa toda la materia que podemos observar y de la que estamos constituidos nosotros mismos. La discusión sobre la materia obscura está fuera del alcance de este trabajo; sin embargo ya se está trabajando para un próximo artículo.

Otro parámetro importante es el de deceleración definido como:

$$q \equiv -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} = -1 - \frac{\dot{H}}{H^2}, \tag{13}$$

el cual mide la tasa de cambio de la velocidad de expansión del Universo. En principio es posible determinar el valor de q_0 de forma observacional. Por ejemplo, para un conjunto idéntico de supernovas en una galaxia remota, la relación entre su brillo y su corrimiento al rojo depende del valor del parámetro de deceleración. Aunque las medidas de esta clase son muy difíciles de realizar e interpretar, las observaciones recientes tienden a favorecer modelos cosmológicos que se aceleran [11], cuya explicación se basa en los modelos conocidos como de energía obscura. En observaciones recientes se encontró que $q_0 = -0,6138 \pm 0,1635$ [1], lo que significa que actualmente la expansión del Universo es acelerada. Tanto Ω como q son parámetros adimensionales.

III. SOLUCIONES DE LAS ECUACIONES PARA ρ y $a(t)$

En esta sección se dan algunas soluciones para las ecuaciones de evolución de una cosmología tipo FRW, Ecs. (6) y (7). Estas soluciones pueden encontrarse en cualquier libro de cosmología, por ejemplo [7]; sin embargo, podemos recomendar la referencia [4] para verlo de una forma más didáctica.

Recordemos que solo dos de las ecuaciones en (6) y (7) son independientes, obteniéndose de ellas un conjunto de tres incógnitas ($a(t)$, $\rho(t)$, $p(t)$), por lo que debemos especificar una ecuación adicional para que el sistema sea consistente. La ecuación a utilizar para tener un sistema completo, es una ecuación de estado que determina el típo de fluido que contendrá el Universo, la cual está dada por:

$$p = (\gamma - 1)\,\rho, \tag{14}$$

donde γ es conocido como parámetro barotrópico y puede tomar los siguientes valores $0 \leq \gamma \leq 2$, por ejemplo, la radiación corresponde al valor $\gamma = 4/3$, la materia no relativista tiene un valor de $\gamma = 1$ y el valor para la energía de vacío es $\gamma = 0$. En algunas ocasiones también se utiliza la ecuación $p = \omega\rho$, con ω constante relacionada con γ de la siguiente forma: $\gamma = \omega + 1$.

Cuando se habla de materia no relativista nos referimos al tipo de materia cuyas velocidades de translación están muy por debajo de la velocidad de la luz. Este tipo de materia es la que nosotros vemos cotidianamente: planetas, polvo estelar (sin incluir la radiación), nebulosas, galaxias, etc., de la misma forma, también se puede considerar la llamada materia obscura, que toma un papel importante a nivel intergaláctico, y en la actualidad se le considera de suma importancia para la descripción del movimiento de las galaxias [10]. De manera observacional, la presión en este tipo de materia parece ser despreciable comparada con la densidad de energía, como lo hemos estado haciendo notar a lo largo de este trabajo, es decir, $p = 0$, lo que implica que $\gamma = 1$ en la ecuación de estado (14).

Cuando hablamos de radiación nos referimos a los fotones que viajan desde cualquier rincón del Universo hasta nuestro planeta, toda radiación electromagnética: luz visible, ondas de radio, infrarrojo, ultravioleta, etc.

Finalmente, la energía de vacio se considera como un tipo de energía puramente cuántica, que existe incluso aún en ausencia total de materia. Esta energía tiene una presión negativa, lo que significa que si un fluido de presión positiva puede empujar las paredes del recipiente que lo contiene, en este caso tendría el efecto contrario, comprimir el recipiente hacia dentro.

Las soluciones a la Ec. (7) para la ecuación barotrópica (14) nos da la evolución de la densidad de energía:

$$\frac{\rho}{\rho_0} \propto \left[\frac{a(t)}{a_0}\right]^{-3\gamma}, \tag{15}$$

donde ρ_0 y a_0 son constantes de integración correspondientes a los valores actuales de cada una de las variables. De esta forma, la densidad como función del factor de escala para diferentes tipos de materia barotrópica se expresa como:

$$\begin{array}{lll} p=\tfrac{1}{3}\rho & \rightarrow & \rho\propto a^{-4}, \\ p=0 & \rightarrow & \rho\propto a^{-3}, \\ p=-\rho & \rightarrow & \rho=\text{constante}, \end{array} \qquad (16)$$

para radiación electromagnética, materia no relativista y energía de vacío respectivamente.

La ecuación de Friedmann, primera Ec. (6), la podemos escribir sin pérdida de generalidad como:

$$\dot{a}(t)^2 \propto \rho a(t)^2 . \qquad (17)$$

Al sustituir la densidad de energía obtenida en la Ec. (15) tenemos que el factor de escala como función de t es:

$$a \propto \left(t-t_0\right)^{\frac{2}{3\gamma}}, \qquad (18)$$

y para los distintos tipos de materia que hemos considerado previamente se tiene que:

$$\begin{array}{lll} a\propto\left(t-t_0\right)^{1/2} & \rightarrow & \rho\propto t^{-2}, \\ a\propto\left(t-t_0\right)^{2/3} & \rightarrow & \rho\propto t^{-2}, \\ a\propto e^{Ht} & \rightarrow & \rho=\text{constante}, \end{array} \qquad (19)$$

para radiación, materia no relativista y energía de vacío respectivamente.

La Ec. (19) nos dice que en el caso de Universo dominado por radiación o materia no relativista o, quizá, una combinación de ambos, la densidad de energía tiene una singularidad al tiempo cero, es decir, la densidad de energía es infinita en el famoso "Big Bang" o gran explosión, y conforme se va expandiendo el Universo esa energía se va distribuyendo en toda su extensión. Como un ejercicio para el lector, se pide encontrar las expresiones de la temperatura del Universo como función del tiempo y comprobar que mientras el Universo se expande (tiempo cada vez más grande) su temperatura va disminuyendo.

El parámetro de deceleración (13) escrito para un fluido barotrópico toma la forma:

$$q_0 = \frac{\Omega_0\left[1+\frac{3p}{\rho}\right]}{2} \equiv \Omega_0\left(\frac{3\gamma}{2}-1\right). \qquad (20)$$

Como podemos ver, el Universo en etapas tempranas de su evolución estuvo dominado por la radiación, posteriormente se fue enfriando y la materia no relativista comenzó a dominar. Actualmente, el Universo está siendo dominado por la energía de vacío (de acuerdo a las observaciones [11]). A pesar del éxito de este modelo, tiene algunos problemas que se han resuelto si se toma en cuenta un periodo de expansión acelerada en una etapa muy temprana del Universo, conocida como inflación, para mayor información de esta etapa ver [6].

IV. CÁLCULO DE LA EDAD DEL UNIVERSO

Desde el punto de vista observacional, podemos mencionar que se ha determinado la edad de cúmulos globulares en la Vía Láctea en alrededor de $13,5\pm2$ mil millones de años [12], lo anterior se ha realizado utilizando un método independiente de la distancia. Por otro lado, si se utiliza un método de secuencia de enfriamiento de enanas blancas [13-14], se obtiene una edad de $12,7\pm0,7$ mil millones de años en el cúmulo globular M4. Estos datos nos indican la cota mínima que se tiene para la edad del Universo: $t_0 > 11-12$ mil de millones de años. Los datos de 7 años de la sonda WMAP determinaron, con un error de hasta el uno por ciento, que la edad definitiva del Universo es de 13,73 mil millones de años.

Una forma muy sencilla de estimar la edad del Universo es considerar que si velocidad de expansión es constante desde su nacimiento, de tal forma que sustituyendo la ley de Hubble (1) en la relación $d=vt$, se tiene que:

$$t = H_0^{-1}, \qquad (21)$$

parámetro que se conoce como el tiempo de Hubble. De las observaciones del telescopio espacial Hubble y otros proyectos [15], el parámetro de Hubble está entre los valores:

$$H_0^{-1} = 9.776h^{-1}, \qquad 0.64 < h < 0.80, \qquad (22)$$

en unidades de mil millones de años.

Para calcular la edad del Universo tomando en cuenta el contenido material del Universo, tomemos la EF (6) junto con la solución que se obtuvo para la ecuación de conservación (15):

$$H^2 = H_0^2\left[\Omega^0\left(a_0/a\right)^{3\gamma}+\Omega_\Lambda{}^0-\Omega_k{}^0\left(a_0/a\right)^2\right], \qquad (23)$$

donde $\kappa=1$, $\Omega^0 = \frac{\rho_0}{3H_0^2}$, $\Omega_\Lambda{}^0 = \frac{\Lambda_0}{3H_0^2}$ y, en caso de que en nuestro modelo contenga tanto radiación como materia, $\rho = \rho_r + \rho_m$, la ecuación de Friedmann toma la forma:

$$H^2 = H_0^2\left[\Omega_r{}^0\left(a/a_0\right)^{-4}+\Omega_m{}^0\left(a/a_0\right)^{-3}+\Omega_\Lambda{}^0-\Omega_k{}^0\left(a/a_0\right)^{-2}\right]. \qquad (24)$$

Además, $\Omega_k{}^0 = \frac{k}{H_0^2 a_0^2}$ es el parámetro de densidad asociado a la curvatura. Los subíndices 0 indican valores actuales. La Ec. (24) se obtuvo sustituyendo las relaciones

$$\frac{\rho_r}{\rho_{r0}} \propto \left[\frac{a(t)}{a_0}\right]^{-4}, \frac{\rho_m}{\rho_{m0}} \propto \left[\frac{a(t)}{a_0}\right]^{-3}, \qquad (25)$$

en la Ec. (23).

Ahora, podemos expresar H en términos del corrimiento al rojo, Ec. (3), de la siguiente forma:

$$H^2 = H_0^{\ 2}\left[\Omega_r^{\ 0}(1+z)^4+\Omega_m^{\ 0}(1+z)^3+\Omega_\Lambda^{\ 0}-\Omega_k^{\ 0}(1+z)^2\right]. \tag{26}$$

El siguiente paso consiste en derivar la Ec. (3) y sustituir la Ec. (24) para escribir la edad del Universo como:

$$\begin{aligned} t_0 &= \int_0^{t_0} dt = \int_0^\infty \frac{dz}{H(1+z)}, \\ &= \frac{1}{H_0}\int_0^\infty \frac{dz}{(1+z)\sqrt{\Omega_r^{\ 0}(1+z)^4+\Omega_m^{\ 0}(1+z)^3+\Omega_\Lambda^{\ 0}-\Omega_k^{\ 0}(1+z)^2}}. \end{aligned} \tag{27}$$

Como podemos observar en la ecuación anterior, la escala de tiempo para la edad del Universo es proporcional al tiempo de Hubble; sin embargo, ahora aparecen correcciones debidas a la presencia de algún tipo de contenido material dentro del Universo.

En la siguiente sección, consideraremos casos particulares para el cálculo de la edad del Universo.

A. Época donde domina la materia no relativista $\gamma = 1$

Consideremos un Universo lleno puramente de materia no relativista desde su nacimiento. Las soluciones a las ecuaciones dinámicas son las siguientes:

$$\begin{aligned} &p = 0,\, a \propto (t-t_0)^{2/3},\ \rho \propto (t-t_0)^{-2}, \\ &\Omega_r^{\ 0} = 0,\ \ \Omega_\Lambda^{\ 0} = 0,\ \ \Omega_k^{\ 0} = \Omega_m^{\ 0} - 1,\ \ q_0 = \frac{\Omega_m^{\ 0}}{2}. \end{aligned} \tag{28}$$

Entonces, la edad del Universo para este caso se calcula a través de la siguiente integral, y usando las Ecs. (27) y (10):

$$t_0 = \frac{1}{H_0}\int_0^\infty \frac{dz}{(1+z)^2\sqrt{\Omega_m^{\ 0}z+1}}. \tag{29}$$

Dependiendo del valor de la dendidad de energía $\Omega_m^{\ 0}$, la integral (29) puede ser distinta.

Una forma distinta de escribir la edad del Universo, es como se propone en [16]. Para ello, despejamos $\ddot{a}$ de la definición del parámetro de deceleración (13) y lo sustituimos en la EF (6):

$$\left(\frac{\dot{a}}{a_0}\right)^2 = H_0^{\ 2}\left(1-2q_0+2q_0\frac{a_0}{a}\right), \tag{30}$$

donde $\kappa = 0,\ \Lambda = 0,$ y $2q_0 = \Omega_m^{\ 0}$, además de considerar la segunda de las Ecs. en (25).

La solución a esta Ec. (30) queda determinada por:

$$t_0 = \frac{1}{H_0}\int_0^a \frac{dx/a_0}{\sqrt{1-2q_0+2q_0a_0/x}}, \tag{31}$$

donde x es una variable de integración y además $a = 0$ en $t = 0$. Si ahora tomamos $w = x/a_0$ entonces (31) toma la forma:

$$t_0 = \frac{1}{H_0}\int_0^a \frac{dw}{\sqrt{1-2q_0+2q_0/w}}. \tag{32}$$

Como podemos ver, tenemos dos expresiones equivalentes para el cálculo de la edad del Universo, Ecs. (29) y (32). Nuestro siguiente paso será tomar los valores que pudiera tener $\Omega_m^{\ 0}$ y realizar la integral explícitamente para conocer la edad del Universo.

A.1 Universo plano $\Omega_m^{\ 0} = 1$

Este es un Universo cuyo contenido material está enteramente dado por materia barotrópica, es decir, $\Omega_m^{\ 0} = 1$ y $q_0 = \frac{1}{2}$, por lo que la integral (29) queda como:

$$t = \frac{2}{3}H_0^{-1}(1+z)^{-3/2}, \tag{33}$$

entonces, la edad del Universo con $z = 0$ y los valores en (22), está en el rango $t_0 = 8-10$ mil millones de años, lo cual no satisface la cota mínima que muestran las observaciones.

A.2 Universo cerrado $\Omega_m^{\ 0} > 1$

Este caso no es, de acuerdo con las observaciones, el mejor modelo para describir nuestro Universo, sin embargo, como ejercicio haremos algunos cálculos que nos darán una idea de la edad del Universo.

La integral (31) en este caso, queda como:

$$H_0 t = \frac{q_0(\theta-\sin\theta)}{\left(\sqrt{2q_0-1}\right)^3}, \tag{34}$$

si se realiza el cambio de variable [16]:

$$1-\cos\theta = \frac{(2q_0-1)\,a}{q_0a_0}. \tag{35}$$

Es muy fácil darse cuenta que las Ecs. (34) y (35) son las ecuaciones paramétricas de una cicloide para la solución $a(t)$. Una cicloide es la curva que genera un punto fijo en una circunferencia que gira sin deslizarse horizontalmente.

En esta curva $a(t)=0$ cuando $\theta=0$, y va creciendo hasta que en $\theta=\pi$ alcanza el máximo y después decrece nuevamente $a(t)=0$ cuando $\theta=2\pi$. El tiempo T_m, cuando se alcanza el valor máximo de $a(t)$, se puede obtener mediante el criterio de la primera derivada, así como el valor del factor de escala en ese momento $a(T_m)$:

$$\begin{aligned} T_m &= \pi q_0 H_0 \left(\sqrt{2q_0-1}\right)^{-3}, \\ a(T_m) &= 2q_0(2q_0-1)^{-1} a_0 . \end{aligned} \tag{36}$$

La edad actual del Universo se obtiene al considerar $\theta=\theta_0$, $a=a_0$ en la Ec. (35) y sustituir en (34):

$$t = H_0^{-1}\frac{q_0}{\left(\sqrt{2q_0-1}\right)^3}\left[\cos^{-1}\left(q_0^{-1}-1\right)-q_0^{-1}\sqrt{2q_0-1}\right], \tag{37}$$

en cuya ecuación podemos dar valores adecuados para q_0 y h, y de esta forma obtener el valor actual de la edad de un Universo cerrado. Por ejemplo, si se consideran $q_0=\frac{2}{3}$ y h=0,72 entonces la edad de este Universo sería de $t_0=8,53$ mil millones de años, el cual es un valor que queda por debajo de la cota dada por la edad de algunas estrellas.

A.3 Universo abierto $\Omega_m{}^0<1$

Este parece ser el caso más real debido a que las observaciones han mostrado que existen otros tipos de elementos adicionales, además de la materia ordinaria, que contiene el Universo. Entonces, tomando $\Omega_m{}^0<1$ y $q_0<\frac{1}{2}$, de tal forma que la integral (29) queda definida como:

$$H_0 t_0 = \frac{1}{1-\Omega_m{}^0} - \frac{\Omega_m{}^0}{2\left(\sqrt{1-\Omega_m{}^0}\right)^3}\ln\left[\frac{1-\sqrt{1-\Omega_m{}^0}}{1+\sqrt{1-\Omega_m{}^0}}\right], \tag{38}$$

de donde observamos que $H_0t_0\to 1$, cuando $\Omega_m{}^0\to 0$, y $H_0t_0\to\frac{2}{3}$, cuando $\Omega_m{}^0\to 1$, lo cual nos da los límites correctos del modelo. Vemos que conforme decrece $\Omega_m{}^0$, la edad del Universo va hacia el tiempo de Hubble. Las observaciones [15] restringen la curvatura a un valor muy cercano a cero, de tal forma que el Universo parece ser plano, es decir $\Omega_m{}^0\simeq 1$, esta edad no es más grande que las estrellas más viejas, por lo que tampoco es muy buen modelo para explicar las observaciones.

El problema del tiempo, puede ser resuelto si se considera un Universo que contenga tanto materia barionica como constante cosmológica, suponiendo un modelo de curvatura cero. En este caso, la integral (27) queda como:

$$\begin{aligned} t_0 &= \frac{1}{H_0}\int_0^\infty \frac{dz}{(1+z)\sqrt{\Omega_m{}^0(1+z)^3+\Omega_\Lambda{}^0}}, \\ &= \frac{2}{3\sqrt{\Omega_\Lambda{}^0}}\ln\left(\frac{1+\sqrt{\Omega_\Lambda{}^0}}{\sqrt{\Omega_m{}^0}}\right), \end{aligned} \tag{39}$$

donde $\Omega_m{}^0+\Omega_\Lambda{}^0=1$. En este caso, los valores asintóticos corresponden a que $H_0t_0\to\infty$ cuando $\Omega_m{}^0\to 0$, y $H_0t_0\to\frac{2}{3}$ cuando $\Omega_m{}^0\to 1$. Por ejemplo, en un modelo donde $\Omega_m{}^0=0.3$, $\Omega_\Lambda{}^0=0.7$, se tiene que $t_0=0,964H_0^{-1}=13,1$ mil millones de años si h=0.72. Este valor, nos permite evitar la restricción impuesta anteriormente, por lo que podemos concluir que la inclusión de una constante cosmológica resuelve el problema de la edad del Universo.

Así como se ha calculado la edad del Universo para contenido de materia no relativista, también podemos hacerlo para cuando existe un dominio de radiación a lo largo de toda su evolución, es decir:

$$\begin{aligned} &a \propto (t-t_0)^{1/2}, \rho \propto (t-t_0)^{-2}, \\ &\Omega_r{}^0=1, \Omega_\Lambda{}^0=0, \Omega_m{}^0=0, q_0=\Omega_r{}^0, \end{aligned} \tag{40}$$

sin embargo, este cálculo lo dejaremos para el lector. Por ahora, es suficiente mencionar que la edad para este modelo es:

$$t_0 \simeq \frac{1}{2}H_0^{-1}, \tag{41}$$

el cual es un valor que no podría explicar la edad de las estrellas [12-14].

B. Época donde domina energía de vacío, constante cosmológica, $\gamma=0$

Con anterioridad se ha introducido la constante cosmológica en un modelo donde tambien se contenia materia barotrópica e incluso materia obscura, y se obtuvo un resultado adecuado a las observaciones. En esta sección, y solo como análisis didáctico, se calcula la edad del Universo cuando éste está dominado por la constante cosmológica a lo largo de toda su evolución, es decir, un Universo que se expande aceleradamente desde su origen.

Es interesante hacer la observación de que una vez que Einstein publicó su TRG se dedicó a hacer consideraciones cosmológicas. Descubrió que era imposible construir un modelo matemático de un Universo estático, coherente con el estado en ese momento de las observaciones (recordemos que la expansión del Universo se descubrio hasta finales de la década de 1920 por parte de Hubble). Sin embargo, Einstein estaba convencido de que el Universo era estático, por lo que introdujo una constante, conocida ahora como constante cosmológica Λ. El objetivo de dicha constante consistía en ofrecer una fuerza de atracción contra la solución expansiva que se obtenía. Actualmente, a esta constante cosmológica se le da una interpretación distinta, ya que ahora puede interpretarse como una presión negativa que contrarresta la fuerza de atracción y, además, puede explicar la expansión acelerada que se observa [15], ésta constante tiene características parecidas a la energía del vacío.

Así, considerando el modelo de un Universo plano $\left(\Omega_k{}^0=0\right)$ que contiene sólo energía del vacío $\left(\Omega_\Lambda{}^0=1\right)$, se tiene que la edad actual de este universo es:

$$t_0 = \tfrac{2}{3} H_0{}^{-1}\Omega_\Lambda{}^{-1/2} \ln\left[\frac{1+\Omega_\Lambda{}^{-1/2}}{1-\Omega_\Lambda{}^{-1/2}}\right]. \tag{42}$$

Es interesante notar que a diferencia de los otros dos modelos anteriores, un Universo con $\Omega_\Lambda{}^0 \geq 0,74$ es más viejo que $H_0{}^{-1}$, esto se debe a que la razón de expansión se acelera. Y, por supuesto, en el límite cuando $\Omega_\Lambda \to 1$, $t_0 \to \infty$. En particular, si $\Omega_\Lambda = 0,74$ y $H_0 = 72\frac{km/s}{Mpc}$, la edad de este Universo dominado por la energía del vacío sería de $15,21$ mil de millones de años que, comparado con el tiempo de Hubble, este Universo sería más viejo que el tiempo de Hubble.

V. CONCLUSIONES

El modelo FRW nos da una idea de cómo surgió el Universo, aunque para ello habría que anexarle el llamado modelo inflacionario [6]. Este modelo nos dice que el Universo comenzó con una densidad infinita de materia (19), en este caso constituido por materia ordinaria que puede ser polvo no relativista o radiación electromagnética e incluso, constante cosmológica. En este artículo revisamos las EE y sus soluciones para tres tipos distintos de materia barotrópica que incluye a la constante cosmológica. Una vez obtenidas las soluciones, se procedió a utilizar la ecuación de Friedmann (6) para encontrar una expresión general para la edad del Universo. Posteriormente, se analizaron los casos en donde domina la materia no relativista, toda aquella que podemos observar en sus diferentes opciones, dependiendo del valor del parámetro densidad de energía $\Omega_m{}^0$ ya sea mayor, menor o igual que cero.

Cuando se considera el valor $\Omega_m{}^0 = 1$ se obtiene un valor para la edad del Universo menor que el que presentan las observaciones de estrellas en diversos cúmulos globulares de nuestra galaxia.

Cuando se tiene un valor $\Omega_m{}^0 > 1$ se observa que la edad de este Universo queda igualmente por debajo de la cota de la edad de algunas estrellas.

El último caso que falta es aquel donde $\Omega_m{}^0 < 1$ el cual es el más interesante ya que permite que el Universo no solo contenga materia barionica o materia obscura, sino que brinda la oportunidad de coexistencia de esta materia con alguna otra de tal forma que la densidad de energía total del Universo sea 1. Por lo que en este caso, si se considera que hay coexistencia de materia bariónica y/o obscura junto con constante cosmológica tal que $\Omega_m{}^0 = 0,3$ y $\Omega_\Lambda{}^0 = 0,7$, la edad del Universo sería más cercana a la observada, es decir, $t_0 = 13,1$ mil millones de años. Por tanto, aquí es razonable pensar en la existencia de dicha constante cosmológica o energía de vacío en nuestro Universo. Algunas veces esta constante cosmológica es reemplazada por modelos un poco más exóticos de energía obscura.

Finalmente se mencionan los resultados para un Universo dominado completamente por radiación y otro por constante cosmológica, en donde se observan resultados que no son del todo adecuados, de acuerdo a las observaciones.

Un complemento a este trabajo, sería explorar algún modelo que pudiera conectar las cuatro etapas que actualmente se reconocen en la evolución del Universo: una etapa de inflación (de expansión acelerada a tiempo temprano), una época de dominio de la radiación, otra etapa de dominio de materia no relativista y, finalmente, una etapa de coexistencia de materia no relativista y energía obscura.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos los comentarios invaluables de los arbitros anónimos de este trabajo, así como a César Mora. Este trabajo fue parcialmente apoyado CONACyT México, a través de los proyectos No. 49924-J y 105079; también a SNI-CONACyT. R. G-S. Agradece el apoyo de las becas COFAA y EDI, así como de los proyectos del IPN SIP-20100610, y SIP-20110664. R. H. y C. M. agradecen a ProSNI-UdG.

REFERENCIAS

[1] Nakamura, K., *et al.*, *Review of Particle Physics*, Journal of Physics G, Nuclear and particle physics **37**, 075021 (2010).

[2] Kelvin, K., Wu, S., Ofer, L. & Rees, J. M., *The large-scale smoothness of the Universe*, Nature **397**, 225-230 (1999), [arXiv:astro-ph/9804062v2].

[3] Ofer, L., *How Smooth is the Universe on Large Scales?*, (1998) [arXiv:astro-ph/9807093v1].

[4] García, S. R. y Moreno, C., *Descripción de la evolución del Universo: Una presentación para alumnos*

preuniversitarios, Lat. Am. J. Phys. Educ. **1**, 95-100 (2007).

[5] Mora, C., *Deducción de los primeros modelos cosmológicos,* Lat. Am. J. Phys. Educ. **2**(2), 180-180 (2008).

[6] Guth, H. A., *El universo inflacionario: la búsqueda de una nueva teoría sobre los orígenes del cosmos*, (Editorial Debate, Madrid, 1999).

[7] Carroll, S. M., *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*, (Addison-Wesley, San Francisco CA, 2003). Coles, P. y Lucchin, F., *Cosmology. The origin and evolution of cosmic structure*, 2a Ed. (John Wiley & Sons, LTD, Great Britain, 2002).

[8] Hubble, E., *A Relation Between Distance nd Radial Velocity Among Extra-Galactic Nebulae*, Proceedings de la Academia Nacional de Ciencias de EEUU **15**, 168-173 (1929): http://www.pnas.org/cgi/reprint/15/3/168.

[9] Lineweaver, C. H. and Davis, T. M., *Misconceptions about the Big Bang*, Scientific American March 2005, 36-45 (2005).

[10] Rubin, V. C. y Ford, W. K., *Rotation of the Andromeda Nebula from a Spectroscopic Survey of Emission Regions*, Astrophys. J. **159**, 379 (1970).

[11] Riess, A. G. *et al*., *Supernova Limits on the Cosmic Equation of State*, Astrophys. J. **509**, 74-79 (1998) [astro-ph/9806396]; S. Perlmutter *et al*., *Measurements of Omega and Lambda from 42 High-Redshift Supernovae*, Astrophys. J. **517**, 565-586 (1999) [astro-ph/9812133].

[12] Jiménez, R. *et al.*, *Ages of globular clusters: A new approach*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **282**, 926-942 (1996).

[13] Ritcher, H. *et al.*, *The lower main sequnce and mass function of the globular cluster Messier 4*, Astrophys. J. **574**, L151-L154 (2002).

[14] Hansen, B. *et al.*, *The white dwarf cooling sequence of the globular cluster messier 4*, Astrophys. J. **574**, L155-L158 (2002).

[15] Freedman, W. L. *et al*., *Final results from the Hubble Space Telescope key project to measure the Hubble constant*, Astrophys. J. **553**, 47-72 (2001); WMAP Collab. (D. N. Spigel, *et al*.), *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Three Year Results: Implications for Cosmology*, Astrophys. J. Suppl. **170**, 377 (2007) [astro-ph/0603449`]; SDSS Collab. M. Tegmark *et al*. *Cosmological parameters from SDSS and WMAP*, Phys. Rev. D**69**, 103501 (2004); U. Seljak *et al*.,*Cosmological parameter analysis including SDSS Ly-alpha forest and galaxy bias: Constraints on the primordial spectrum of fluctuations, neutrino mass, and dark energy*, Phys. Rev. D**71**, 103515 (2005).

[16] Islam, J. N., *An introduction to Mathematical cosmology*, 1a Ed. (Cambridge U. P., Cambridge, 1992).